МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

Ю.В. Яременко, Л.І. Лутченко

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Частина 2

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Кіровоград – 2005

УДК 514.12
ББК 22.151.5
Я 72

Аналітична геометрія. ч.2. Навчально-методичний посібник / Укл. Ю.В. Яременко, Л.І. Лутченко – Кіровоград: “Антураж А”, 2005. – 116 с.

Даний посібник є продовженням і логічним завершенням посібника Аналітична геометрія, частина 1. У посібнику розглядаються основні поняття аналітичної геометрії з таких тем: перетворення площини, квадратичні форми, криві другого порядку, поверхні другого порядку. Матеріал з вказаних тем викладено в обсязі, передбаченому навчальними програмами для фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Наведено розв’язання типових прикладів та підібрано вправи для самостійної роботи, що допоможе кращому засвоєнню теоретичного матеріалу.

Навчально-методичний посібник буде корисним для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних вузів, а також для студентів, учнів та вчителів математики інших навчальних закладів, де вивчаються основи аналітичної геометрії. Особливо дана робота буде корисна для студентів заочної форми навчання.

Рецензент: Кириченко В.В., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри геометрії Київського національного університету ім. Тараса Шевченка; Волков Ю.І., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математики Кіровоградського державного університету ім. Володимира Винниченка

Затверджено до друку методичною радою КДПУ ім.В.Винниченка (протокол № 12 від 02.02.2005 р.).

ББК 22.151.5
Я 72

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Аналітична геометрія вивчає властивості геометричних фігур за допомогою методів алгебри з застосуванням методу координат.

Справа в тому, що між геометричними фігурами і числами можна різними способами установити тісний зв'язок таким чином, щоб кожній геометричній фігурі, чи деякій її властивості, відповідала певна система чисел, або співвідношення між числами, або рівняння. Можна знайти багато способів для встановлення такого зв'язку, але тільки деякі із них представляють інтерес для математики і її використанні в інших науках.

Один з таких способів застосував вперше французький математик і філософ Рене Декарт (1596-1650р.), якого можна вважати основоположником аналітичної геометрії. У своїй праці „Геометрія", опублікованій у 1637р., як частині його філософського твору „Міркування про метод", Декарт вперше застосував ідею координат (метод координат), яка і на сьогоднішній день залишається в основі аналітичної геометрії. Суть методу координат полягає в тому, що розміщення точки відносно системи координат визначається однозначно за допомогою відповідних чисел – координат цієї точки. Метод координат дав можливість описати положення не лише точок, а й прямих, площин, кривих та поверхонь методами алгебри.

Декарту належить і ідея геометричної інтерпретації рівнянь, суть якої в тому, що алгебраїчному рівнянню з двома невідомими зіставлена деяка лінія на площині і навпаки.

Незалежно від Декарта метод координат розробив і використовував математик П'єр Ферма (1601-1650р.), праці якого були опубліковані лише у 1679р.

Розвиток цих ідей і привів до створення аналітичної геометрії, яка встановила зв'язок між алгеброю і геометрією.

Відмітимо праці Л. Ейлера „Вступ в аналіз" (1748), де вперше дано систематичний виклад аналітичної геометрії як на площині, так і у просторі, а також фактично в сучасному розумінні викладена теорія кривих і поверхонь, та Лагранжа „Аналітична механіка” (1788), де показано застосування методу координат у фізиці.

Подальшим розвитком ідей Лагранжа було створення векторного числення, яке значно спрощує виклад аналітичної геометрії. Саме поняття вектора в математиці з’явилося в середині XIX ст., і лише на початку XX ст. векторне числення фактично стало апаратом для геометрії та фізики.

Термін „аналітична геометрія” ввів французький математик Лакруа в четвертому виданні своєї книги „Курс математики” (1807), а першу книгу під назвою „Аналітична геометрія” опублікував у 1808р. Гарньє.

Аналітична геометрія мала великий вплив на розвиток багатьох розділів математики та фізики.

У другій частині даного посібника викладено основний матеріал аналітичної геометрії з таких тем: перетворення площини, квадратичні форми, криві другого порядку, поверхні другого порядку. Матеріал з вказаних тем викладено в обсязі, передбаченому навчальними програмами для фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. З кожної тими наведено зразки розв’язання типових прикладів, та підібрано близько 300 задач для самостійної роботи, розв’язання яких беззаперечно допоможе кращому засвоєнню теоретичного матеріалу.

В основу навчально-методичного посібника покладено курс лекцій з аналітичної геометрії, які протягом багатьох років читалися першим автором на фізико–математичному факультеті Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Розділ 1

Перетворення площини

§ 1. Перетворення площини. Група перетворень площини та її підгрупи

Розглянемо дві непорожні множини X і Y. Кожному елементу $x \in X$ поставимо у відповідність елемент $y \in Y$. Отримаємо **відображення множини *X* на множину *Y***, тобто **функцію**, яку позначають однією буквою, наприклад *f*. Множина X називається **областю визначення функції *f***, а множина всіх значень *f(x)* називається **областю значень функції *f*.**

Ми будемо розглядати такі відображення, у яких область визначення і область значень – це множина точок площини.

Нагадаємо, що відображення називається **взаємно-однозначним**, якщо кожному елементу $x \in X$ відповідає єдиний елемент $y \in Y$ і навпаки будь-якому елементу $y \in Y$ відповідає єдиний елемент $x \in X$.

Перетворенням площини називається взаємно-однозначне відображення її на себе.

Часто в геометрії потрібно виконувати не одне, а кілька перетворень. Важливим є той випадок, коли розглядається така множина перетворень, що кожну скінчену послідовність перетворень цієї множини можна замінити одним перетворенням з цієї ж множини. Тут ми приходимо до поняття групи перетворень. Розгляд групи перетворень дає можливість виділити ряд геометричних властивостей, які не змінюються при цих перетвореннях і характеризують деяку область геометрії.

Нагадаємо, що непорожня множина G, на якій визначена бінарна операція $*$ (закон композиції), називається **групою**, якщо виконуються наступні три умови:

1) операція $*$ асоціативна, тобто для будь-яких елементів a, b, c із G $(a*b)*c=a*(b*c)$;
2) в множині G існує нейтральний (одиничний) елемент e, тобто такий елемент, що для будь–якого елемента a із G $a*e=e*a=a$.
3) для кожного елемента $a \in G$ в множині G існує обернений елемент a^{-1}, тобто такий, що $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$.

Позначають групу $(G,*)$.

Операція бінарна це означає, що при її виконанні двом елементам розглядуваної множини ставиться у відповідність елемент цієї ж множини.

Покажемо, що множина всіх перетворень площини утворює групу. Закон композиції * визначається тут як добуток двох перетворень (тобто їх послідовне виконання). Ясно, що добуток двох перетворень площини буде перетворення площини. Нейтральним (одиничним) елементом e такої множини буде тотожне перетворення (перетворення при якому кожен елемент переходить в себе). Нехай α – деяке перетворення площини. За означенням перетворення α – взаємно-однозначне відображення площини на себе, отже існує і обернене перетворення α^{-1}, яке образи перетворення α відобразить в їх прообрази. Очевидно, що при цьому $\alpha * \alpha^{-1} = \alpha^{-1} * \alpha = e$, тобто для кожного перетворення площини існує обернене.

Доведемо, що добуток перетворень асоціативний. Нехай M – деяка точка площини, M' – її образ при перетворенні α, M'' – образ точки M' при перетворенні β, а M''' – образ точки M'' при перетворенні γ. Тоді при перетворенні $\beta*\alpha$ точка M перейде в точку M'', а точка M' при перетворенні $\gamma*\beta$ перейде в точку M'''. Тому:

$\gamma*(\beta*\alpha)(M)=\gamma(M'')=M'''$,

$(\gamma*\beta)*\alpha(M)=(\gamma*\beta)(M')=M'''$.

Отже, $\gamma*(\beta*\alpha)=(\gamma*\beta)*\alpha$.

Таким чином всі три умови групи виконуються.

Групу всіх перетворень площини позначають G_E.

Непорожня підмножина H групи $(G,*)$ яка в свою чергу є групою відносно операції * називається **підгрупою групи (G,*)**.

Для того, щоб перевірити чи буде дана підмножина H групи G її підгрупою, потрібно перевірити дві умови (замкненість операції на множині H і існування оберненого):

Теорема 1. *Непорожня підмножина H групи G являється підгрупою цієї групи, якщо виконуються умови:*

1. Якщо $a \in H$ і $b \in H$, то $a*b \in H$.

2. Якщо $a \in H$, то $a^{-1} \in H$.

Доведення.

З першої умови випливає, що на множині H визначена бінарна операція. Очевидно, що вона асоціативна на множині H, так як вона асоціативна на всій множині G. З другої умови маємо: $a*a^{-1}=e \in H$ і всі три умови групи виконуються.

§ 2. Рухи площини. Властивості рухів

Перетворення площини зберігає відстані, якщо відстань між будь-якими двома точками A і B площини рівна відстані між їхніми образами A' і B', тобто $|AB| = |A'B'|$.

Перетворення площини, яке зберігає відстані, називається **рухом.**

Найбільш простим прикладом руху є тотожне перетворення площини, тобто перетворення, при якому кожна точка площини переходить в себе.

Приведемо ще один приклад руху.

Розглянемо на площині π вектор $\vec{p}$. Кожній точці M площини π поставимо у відповідність точку M' так, щоб $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$. Ми отримаємо деяке відображення f: $\pi \to \pi$, яке є перетворенням площини π. Воно називається паралельним перенесенням на вектор $\vec{p}$. Якщо $\vec{p} = \vec{0}$, то паралельне перенесення – тотожне перетворення.

Доведемо, що паралельне перенесення є рухом.

Нехай M_1 і M_2- дві точки площини (рис. 1), а M_1' і M_2' – їх образи. Потрібно показати, що $|M_1'M_2'| = |M_1M_2|$.

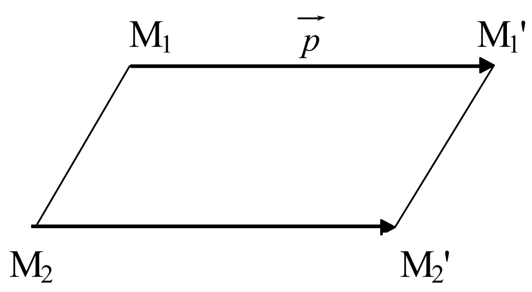

Рис. 1

За означенням паралельного перенесення:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_1'} = \vec{p} \\ \overrightarrow{M_2M_2'} = \vec{p} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_1'} = \overrightarrow{M_2M_2'} \Rightarrow M_1M_1'M_2'M_2$$ – паралелограм,

тому $|M_1M_2| = |M_1'M_2'|$.

Отже, паралельне перенесення – рух площини.

Впорядковану трійку точок A, B, C площини, які не лежать на одній прямій називають **репером.**

Позначають: $R = (A, B, C)$

Точку A називають **початком**, а B і C **– вершинами**.

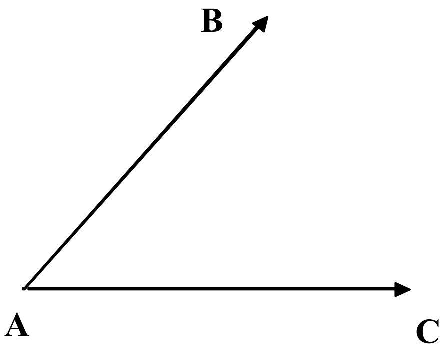

Рис. 2

Якщо ΔABC– довільний, то репер називається **афінним** (рис.2).

Якщо $\angle BAC = 90°$, і $|AB| = |AC| = 1$, то репер називають **ортонормованим.**

Фактично репер – це система координат, де A – початок, а B і C кінці базисних векторів.

Очевидно, що при рухові репер переходить в репер, причому ортонормований репер переходить в ортонормований репер (так як ΔABC переходить у рівний йому трикутник $A'B'C'$).

Теорема 2. *Нехай $R=(A,B,C)$ і $R'=(A',B',C')$ два довільні ортонормовані репери площини. Тоді існує єдиний рух, який переводить R в R', причому будь-яка точка M з даними координатами в репері R переходить в точку M' з такими ж координатами в репері R'.*

Доведення.

Доведемо спочатку, що такий рух існує.

Задамо відображення $f : \pi \to \pi$ так щоб будь-якій точці M в репері R відповідала точка M' з такими ж координатами в репері R': $M(x, y)_R \xrightarrow{f} M'(x, y)_{R'}$.

При цьому відображенні маємо:

$A(0,0)_R \xrightarrow{f} A'(0,0)_{R'}$,

$B(1,0)_R \xrightarrow{f} B'(1,0)_{R'}$,

$C(0,1)_R \xrightarrow{f} C'(0,1)_{R'}$.

Таке відображення f буде взаємно-однозначним, тобто є перетворенням площини.

Покажемо, що f зберігає відстані між точками, тобто є рухом. Розглянемо точки $M_1(x_1, y_1)_R$ і $M_2(x_2, y_2)_R$. Тоді

$M_1(x_1, y_1)_R \xrightarrow{f} M_1'(x_1, y_1)_{R'}$,

$$M_2(x_2, y_2)_R \xrightarrow{f} M'_2(x_2, y_2)_{R'},$$

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{і} \quad |M'_1M'_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Отже, $|M_1M_2| = |M'_1M'_2|$, тобто f є рухом.

Покажемо, що f єдиний рух площини, який переводить $R \to R'$ і зберігає координати точок.

Припустимо, що існує ще один рух g такий, що задовольняє умову теореми. Але тоді на площині існує така точка M, що її образ M_1 при рухові f не співпадає з її образом M_2 при рухові g.

Так як $f(A) = A'$, і $g(A) = A'$, то

$$\left.\begin{array}{l}|AM| = |A'M_1| \\ |AM| = |A'M_2|\end{array}\right\} \Rightarrow |A'M_1| = |A'M_2|,$$ тобто точка A' рівновіддалена від точок M_1 і M_2.

Аналогічно $f(B) = B'$, $g(B) = B'$ і

$$\left.\begin{array}{l}|BM| = |B'M_1| \\ |BM| = |B'M_2|\end{array}\right\} \Rightarrow |B'M_1| = |B'M_2|,$$ отже точка B' рівновіддалена від точок M_1 і M_2 і $f(C) = C'$, $g(C) = C'$, то

$$\left.\begin{array}{l}|CM| = |C'M_1| \\ |CM| = |C'M_2|\end{array}\right\} \Rightarrow |C'M_1| = |C'M_2|,$$ отже, точка C' рівновіддалена від точок M_1 і M_2.

Таким чином точки A', B' і C' належать серединному перпендикуляру відрізка M_1M_2, отже, вони лежать на одній прямій, чого бути не може, так як (A', B', C') – репер. Отже, припущення не вірне і існує єдиний рух *f*, який задовольняє умову теореми.

Зупинимося на властивостях руху.

1. Рух переводить пряму у пряму, причому паралельні прямі в паралельні прямі.

Доведення.

Розглянемо ортонормований репер $R(A, B, C)$ і його образ після руху $R'(A', B', C')$. Нехай пряма l в репері R має рівняння $Ax + By + C = 0$. Тоді, згідно теореми 2, образ l' цієї прямої в репері R' визначається таким же рівнянням (як множина образів всіх точок прямої l) отже, є прямою.

Очевидно, що пряма $l_1 // l$ в репері R має рівняння $Ax + By + C_1 = 0$. При рухові вона перейде в пряму l_1' з таким же рівнянням в репері R' отже, $l_1' // l'$.

2. Рух зберігає просте відношення трьох точок.

Доведення.

Нагадаємо, що **простим відношенням** трьох точок, які лежать на одній прямій l (рис.3) називають таке число $\lambda = (AB, C) = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$.

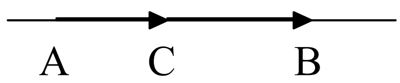

Рис. 3

Нехай в репері R три довільні точки *A, B, C* прямої мають координати: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x, y)$.

Тоді координати точки C обчислюються за формулами :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Нехай репер R' – образ репера R при русі. Тоді точки A', B' і C' мають такі ж координати як і точки *A, B, C,* а отже вони пов’язані такими ж формулами, тобто точка C' ділить відрізок $A'B'$ в тому ж відношенні λ.

Як наслідок, середина відрізка переходить в середину відрізка.

З попереднього легко отримати:

3. Рух зберігає поняття „лежати між”.

4.Рух переводить півплощину з границею l в півплощину з границею l', де l' – образ прямої l.

5. Рух переводить промінь в промінь.

6. Рух переводить кут в рівний йому кут (так як переводить трикутник в рівний йому трикутник).

Отже, перпендикулярні прямі при русі переходять в перпендикулярні прямі.

§ 3. Два види руху. Аналітичне задання руху

Будемо говорити, що перетворення площини зберігає орієнтацію площини, якщо репер R і його образ R' однаково орієнтовані і змінює орієнтацію площини, якщо R і R' протилежно орієнтовані.

Наприклад, такі добре відомі із школи рухи як паралельне перенесення та поворот навколо точки зберігають орієнтацію площини, а осьова симетрія змінює орієнтацію площини.

Коли рух орієнтація площини не змінює, то він називається **власним** (рухом першого роду), якщо змінює – **невласним** (рухом другого роду).

Отримаємо а**налітичне задання руху.**

Нехай g – даний рух. Розглянемо на площині ортонормований репер $R=(O,A,B)$. Позначимо $(x,\ y)$ координати довільної точки M в цьому репері, а через (x', y') координати її образа при рухові g в цьому ж репері R.

Одержати аналітичне задання руху значить виразити координати точки $M'(x', y')$ в репері R через x, y.

Так як рух g задано, то за теоремою 2 ортонормований репер $R=(O,A,B)$ перейде в ортонормований репер $R'=(O',A',B')$. $M \xrightarrow{g} M'$, причому $M(x,y)_R \xrightarrow{g} M'(x,y)_{R'}$.

Отже, фактично одержуємо звичайну задачу перетворення прямокутних систем координат: точка M' в старому репері *R* має координати x', y', а в новому репері R' – *x, y*. Потрібно виразити x', y' через *x, y*.

Такі формули мають вигляд:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha + x_0, \\ y' = x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha + y_0, \end{cases} \qquad (1)$$

де $\varepsilon = 1$, якщо репери R і R' однаково орієнтовані, тобто при рухах першого роду, і $\varepsilon = -1$, при рухах другого роду.

§ 4. Класифікація рухів площини

Класифікацію рухів площини проведемо в залежності від наявності інваріантних точок і прямих, і одержимо аналітичне задання конкретних рухів.

Інваріантна точка (нерухома) перетворення – це точка, яка переходить в себе при даному перетворенні.

Інваріантна пряма (нерухома) – це пряма, кожна точка якої переходить в точку цієї ж прямої при даному перетворенні .

Власні рухи:

а) тотожне перетворення. Ясно що при такому перетворенні повороту немає, отже $\angle\alpha = 0°$ і перенесення немає, тому $x_0 = y_0 = 0$. Підставивши ці значення в формулу (1) отримаємо :

$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$. Тобто інваріантними залишаються всі точки і всі прямі площини.

б) поворот на $\angle\alpha \neq 0°, \angle\alpha \neq 180°$. Нехай центром обертання є точка *O(0,0).* Тоді $x_0 = y_0 = 0$, і маємо аналітичне задання :

$$\begin{cases} x' = xcos\alpha - ysin\alpha, \\ y' = xsin\alpha + ycos\alpha. \end{cases}$$ Інваріантною є єдина точка – точка навколо якої виконується обертання. Інваріантних прямих немає.

в) центральна симетрія. Тут $\angle\alpha = 180°$ **.** Нехай центром симетрії є точка *O(0,0),* тоді $x_0 = y_0 = 0$. Отримаємо з формул (1) аналітичне задання такої симетрії:

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases}$$ Інваріантна точка – центр симетрії. Інваріантні прямі – прямі, що проходять через центр симетрії.

г) паралельне перенесення. Маємо $\alpha = 0°; \vec{p} \neq \vec{0}, \vec{p} = (x_0, y_0).$ Аналітичне задання:

$$\begin{cases} x' = x + x_0, \\ y' = y + y_0. \end{cases}$$ Інваріантних точок немає, інваріантні прямі – прямі, що паралельні до $\vec{p}$.

Невласні рухи:

а) осьова симетрія. Повороту немає, тому $\alpha = 0°$. Якщо $x_0 = y_0 = 0$, то отримаємо осьову симетрію відносно осі *OX*:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$$ Інваріантні точки – всі точки вісі симетрії. Інваріантні прямі – сама вісь симетрії і всі прямі, які перпендикулярні до неї.

б) ковзна симетрія (симетрія відносно прямої, а потім перенесення на $\vec{p}$ паралельний до цієї прямої).

Тут $\alpha = 0°$**,** і якщо розглянути осьову симетрію відносно вісі *OX*, то отримаємо :

$$\begin{cases} x' = x + x_0, \\ y' = -y. \end{cases}$$ Інваріантні точки – точки вісі симетрії, інваріантна пряма – вісь симетрії.

§ 5. Група рухів площини і її підгрупи

Нам відомо (див.§1), що всі перетворення площини утворюють групу G_E. Позначимо D – множину всіх рухів площини. Так як рухи площини – це перетворення площини, то для того, щоб вони утворювали групу, згідно теореми 1, досить перевірити дві умови: замкненість і існування оберненого елемента на множині рухів.

Перевіримо замкненість: Операція тут – композиція рухів. Потрібно показати, що композиція будь-яких двох рухів є рух.

Розглянемо дві точки A і B площини. Нехай рух g відображає їх в точки A' і B'. Тоді за означенням руху $|A'B'| = |AB|$. Нехай рух f відображає точки A' і B' в точки A'' і B'' відповідно, тоді $|A''B''| = |A'B'|$. Отже, $|A''B''| = |AB|$. Таким чином послідовне виконання двох рухів g і f, тобто їх композиція – теж рух, так як зберігає відстань між точками.

Очевидно, що для будь-якого руху g існує обернений рух g^{-1}. Тому всі рухи площини утворюють групу D, яка є підгрупою групи G_E.

Розглянемо множину всіх власних рухів D_1 площини. Очевидно, що композиція двох власних рухів є власним рухом (орієнтація площини не змінюється) і для будь-якого власного руху g існує обернений g^{-1} (так як для всіх рухів площини існують обернені), отже, множина D_1 утворює групу, яка є підгрупою групи D.

Невласні рухи не утворюють групу, так як не виконується перша умова (замкненість). Дійсно, послідовне виконання двох невласних рухів буде власним рухом.

Нехай T – множина всіх паралельних переносів площини. Тоді T – підмножина групи власних рухів D_1. Так як композиція двох паралельних переносів є паралельний перенос (наприклад композиція двох паралельних переносів на вектори $\vec{a}$ і $\vec{в}$ відповідно є паралельний перенос на вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{в}$) і для будь-якого переносу на вектор $\vec{a}$ існує обернений (перенос на вектор $-\vec{a}$, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$), то T – група переносів площини.

Отже, всі паралельні перенесення утворюють групу T – підгрупу груп D і D_1. Неважко перевірити, що і всі повороти навколо фіксованої точки M_0 утворюють групу, підгрупу D_1 і D. Всі ці групи нескінченні, так як мають нескінченне число елементів.

Існують і скінченні підгрупи групи рухів.

Розглянемо D_F – множину всіх рухів площини, які переводять фігуру F в себе.

1. Очевидно, що якщо рух *f* відображає фігуру *F* в себе і рух *g* відображає *F* в себе, то і послідовне виконання рухів *f* і *g (f*g)* відображає фігуру *F* в себе, тому операція замкнена (1-ша умова).

2. Ясно також, що для будь-якого руху, що відображає фігуру *F* в себе, існує обернений елемент (рух назад) який відображає *F* в себе (2-га умова).

Отже, D_F – група.

Якщо D_F містить елементи відмінні від тотожного перетворення, то вона називається **групою симетрії фігури *F*,** а її елементи – симетріями цієї фігури.

Якщо F – коло або смуга, то D_F – нескінченна. Якщо ж F – рівнобедрений трикутник, то D_F складається з 2-х елементів. Якщо F – рівносторонній трикутник, то D_F складається з 4-х елементів, *F* – квадрат , то D_F містить 5 елементів.

Можна розглянути і групу W_n поворотів правильного n–кутника. Її елементи – повороти многокутнока навколо його центра O, які відображають многокутник в себе. Ця група складається з степенів одного з своїх елементів (циклічна). Наприклад, для рівностороннього трикутника $n=3$ і $W_3 = (\varphi, \varphi^2, \varphi^3 = e)$ Тут φ – поворот трикутника на кут 120° навколо точки O (рис.4), φ^2 *на* 240°, φ^3 *на* 360°$= e$ – тотожному перетворенню.

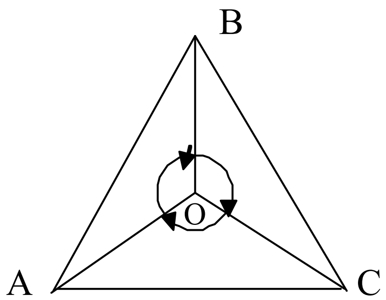

Рис. 4

§ 6. Перетворення подібності.
Гомотетія як приклад перетворення подібності.
Властивості гомотетії

Перетворення площини називається **перетворенням подібності (подібністю),** якщо існує число $k>0$ таке, що для будь-яких точок A і B і їх образів A' і B' виконується умова

$|A'B'| = k|AB|$.

Якщо $k=1$, то отримаємо рух площини.

Тобто рух – це частковий випадок перетворення подібності.

Розглянемо приклад перетворення подібності, відмінного від руху.

Зафіксуємо точку M_0 і число $m \neq 0$.

Кожній точці M площини поставимо у відповідність точку M' таку, щоб виконувалась рівність: $\overrightarrow{M_0M'} = m\overrightarrow{M_0M}$ **(2)**

(рис.5).

Таке перетворення площини називається **гомотетією з центром в точці** M_0 **і коефіцієнтом** $\boldsymbol{m}$**.**

Покажемо, що гомотетія є перетворенням подібності.

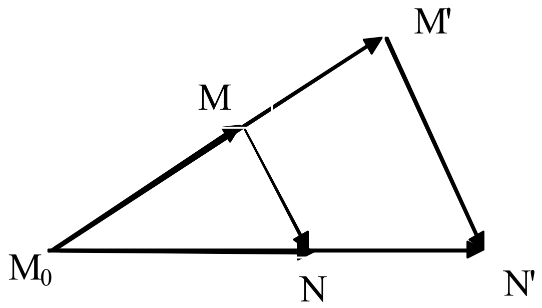

Рис.5

Розглянемо ще одну точку N площини та її образ – точку N' (рис.5). Тоді $\overrightarrow{M_0N'} = m\overrightarrow{M_0N}$.

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M_0N'} - \overrightarrow{M_0M'} = m\overrightarrow{M_0N} - m\overrightarrow{M_0M} =$

$= m(\overrightarrow{M_0N} - \overrightarrow{M_0M}) = m\overrightarrow{MN}.$ Отже,

$$\overrightarrow{M'N'} = m\overrightarrow{MN} \qquad \textbf{(3)}$$

Таким чином гомотетія є перетворенням подібності з коефіцієнтом $k=|m|$.

- якщо $m=1$, то маємо тотожне перетворення,
- якщо $m=-1$, то це перетворення – центральна симетрія відносно точки M_0,
- якщо $m \neq \pm 1$, то гомотетія відмінна від руху.

Задамо на площині систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$, і розглянемо точку M та її образ точку M' при гомотетії з центром в точці *O(0,0)* (рис.6). Одержимо аналітичне задання такої гомотетії.

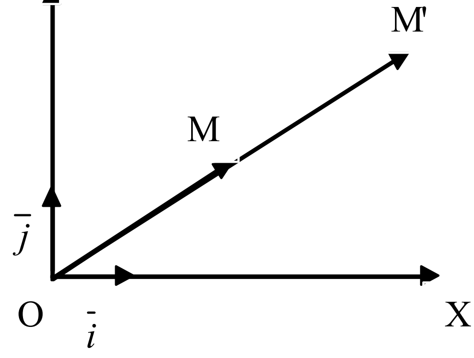

Рис. 6

Нехай точка M має координати *x, y,* а точка M' має координати x', y'. Тоді за означенням гомотетії $\overrightarrow{OM'} = m\overrightarrow{OM}$. Перейшовши до координат, отримаємо:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = my \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

Розглянемо властивості гомотетії.

1. Гомотетія з коефіцієнтом $m \neq 1$ переводить пряму, яка не проходить через центр гомотетії в паралельну їй пряму, а пряму яка проходить через центр гомотетії –в себе.

Доведення.

Нехай пряма l в деякій системі координат має рівняння: $Ax + By + C = 0$. Для знаходження рівняння її образа l' використаємо формули (4). З них отримаємо: $\begin{cases} x = \dfrac{x'}{m} \\ y = \dfrac{y'}{m} \end{cases}$ і підставивши в рівняння прямої l одержимо рівняння $l' : Ax' + By' + Cm = 0$. Отже, l' – пряма паралельна до прямої l, якщо $C \neq 0$, тобто якщо пряма не проходить через початок системи координат і $l' = l$, якщо $C=0$ (пряма l проходить через початок координат).

2. Гомотетія зберігає просте відношення трьох точок.

Доведення.

Нехай при гомотетії точки $A \to A', B \to B', C \to C'$.

Розглянемо їх прості відношення

$\lambda = (AB, C) = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$ і $\lambda' = (A'B', C') = \dfrac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{C'B'}}$, або

$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{A'C'} = \lambda' \overrightarrow{C'B'}$.

Але, згідно рівності (3) $\overrightarrow{A'C'} = m\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{C'B'} = m\overrightarrow{CB}$. Отже,

$m\overrightarrow{AC} = \lambda' m\overrightarrow{CB}$, або $\overrightarrow{AC} = \lambda' \overrightarrow{CB}$. Таким чином

$\lambda' = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda' = \lambda.$

3. Гомотетія переводить відрізок у відрізок, промінь у промінь, півплощину в півплощину.

Доведення випливає з перших двох властивостей.

4. Гомотетія переводить кут у рівний йому кут.

Доведення.

Нехай ABC даний кут, а $A'B'C'$ – його образ. За формулою (3) отримаємо: $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{B'A'} = m\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{B'C'} = m\overrightarrow{BC}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle ABC = \angle A'B'C'$.

5. Гомотетія зберігає орієнтацію площини.

Доведення. Розглянемо репер *R=(B,A,C)* і його образ при гомотетії $R' = (B', A', C')$. Так як $\overrightarrow{B'A'} = m\overrightarrow{BA}$, а $\overrightarrow{B'C'} = m\overrightarrow{BC}$, то R і R' однаково орієнтовані, тобто гомотетія зберігає орієнтацію площини.

Отже, гомотетія має такі ж властивості як і рухи першого роду.

§ 7. Аналітичне задання подібності. Властивості подібності

Покажемо, що послідовне виконання двох перетворень подібності (їх композиція) є перетворенням подібності. Розглянемо два перетворення подібності f з коефіцієнтом подібності k_1 і g з коефіцієнтом k_2 та довільні дві точки A і B площини. Тоді :

$$\begin{array}{l} A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A'' \\ B \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{g} B'' \end{array}.$$

За означенням подібності

$$\begin{array}{l} |A'B'| = k_1|AB|, \\ |A''B''| = k_2|A'B'|. \end{array}$$

Отже , $|A''B''| = k_1 k_2 |AB|$.

Таким чином композиція двох перетворень подібності з коефіцієнтами k_1 і k_2 буде перетворенням подібності з коефіцієнтом $k = k_1 k_2$.

Теорема 3. Якщо f – перетворення подібності з коефіцієнтом k, а h – гомотетія з цим же коефіцієнтом k і з центром в точці M_0, то існує єдиний рух g, такий що $f = g * h$. **(5)**

Доведення.

Покажемо, що такий рух існує. Розглянемо перетворення

$g = f * h^{-1}$ **(6)**

Тоді g – це перетворення подібності з коефіцієнтом $k \cdot \frac{1}{k} = 1$, тобто є рухом. Помножимо обидві частини рівності (6) на h справа :

$g * h = f * h^{-1} * h = f$. Отже, $f = g * h$ і існування руху g доведено.

Покажемо, що такий рух єдиний.

Припустимо, що існує ще один рух g_1, такий, що $f = g_1 * h$. Помножимо обидві частини цієї рівності на h^{-1}:

$f * h^{-1} = g_1 * h * h^{-1}$, або $g_1 = f * h^{-1} \Rightarrow g_1 = g$.

Отже, ми довели, що перетворення подібності – це композиція гомотетії і руху.

Так як гомотетія має такі ж властивості як і рух, то з урахуванням теореми і подібність має властивості:

1. Подібність переводить пряму в пряму, паралельні прямі в паралельні прямі.

2. Подібність зберігає просте відношення трьох точок.

3. При перетворенні подібності кут переходить в рівний йому кут.

4. При подібності півплощина переходить у півплощину.

5. Подібність змінює орієнтацію площини, якщо рух змінює орієнтацію площини (рух невласний) і не змінює в противному (якщо рух власний). В першому випадку перетворення подібності називається невласним (перетворенням подібності 2-го роду), в другому – власним (перетворенням подібності 1-го роду).

Нехай f перетворення подібності з коефіцієнтом *k*. Задамо на площині деяку систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ і отримаємо в ній

аналітичне задання подібності f.

Скористаємося теоремою 3. Розглянемо гомотетію *h* з центром в точці *O* і коефіцієнтом *k*. Її аналітичне задання $h: \begin{cases} x' = kx, \\ y' = ky. \end{cases}$

Нехай *g* – рух, який задовольняє рівність (5). Аналітичне задання руху $g: \begin{cases} x'' = x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha + x_0, \\ y'' = x'\sin\alpha - \varepsilon y'\cos\alpha + y_0. \end{cases}$

Отже, якщо точка *M(x,y)* при перетворенні подібності перейде в точку $M''(x'', y'')$, то аналітичне задання подібності матиме вигляд:

$$f: \begin{cases} x'' = kx\cos\alpha - \varepsilon ky\sin\alpha + x_0 \\ y'' = kx\sin\alpha + \varepsilon ky\cos\alpha + y_0 \end{cases} \qquad \textbf{(7)}$$

Теорема 4. Будь-яке перетворення подібності, відмінне від руху, має тільки одну нерухому точку.

Доведення.

Нехай перетворення подібності має аналітичне задання (7). Точка *M(x,y)* буде нерухомою точкою цього перетворення тільки тоді, коли $\begin{cases} (k\cos\alpha - 1)x - \varepsilon ky\sin\alpha + x_0 = 0, \\ (kx\sin\alpha + (\varepsilon k\cos\alpha - 1)y + y_0 = 0. \end{cases}$

Розглянемо визначник *C* цієї системи :

$$C = \begin{vmatrix} k\cos\alpha - 1 & -\varepsilon k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & \varepsilon k\cos\alpha - 1 \end{vmatrix}.$$

Якщо *ε=1*, то $C = (k - \cos\alpha)^2 + 1 - \cos^2\alpha$, а якщо *ε= -1*, то

$C=1-k^2$. Отже, при $k \neq 1$, $C \neq 0$. Таким чином система має єдиний розв'язок – єдину нерухому точку перетворення.

Наслідок. Перетворення подібності, яке не має нерухомих точок, або має більше ніж одну нерухому точку є рухом.

§ 8. Класифікація перетворень подібності

Класифікацію перетворень подібності проведемо в залежності від існування інваріантних точок і прямих. Будемо розглядати перетворення подібності відмінне від руху.

Власні перетворення подібності.

Нехай перетворення подібності f з коефіцієнтом k має тільки одну нерухому точку, позначимо її O. Позначимо h - гомотетію з центром O і коефіцієнтом k. За теоремою 3 існує такий рух g, що $f = g * h$. Оскільки f і h власні перетворення подібності то і рух g – власний причому $g(0) = 0$. Таким чином g – поворот навколо точки O. Можливі три випадки :

1) g – тотожне перетворення . В цьому випадку $f = h$, отже, f - гомотетія з додатним коефіцієнтом $k \neq 1$.

2) g – центральна симетрія. Тоді $f = g * h$ - гомотетія з від'ємним коефіцієнтом $m \neq -k$.

3) g – поворот на кут α, $\alpha \neq 0^0$ і $\alpha \neq \pm\pi$.. В цьому випадку f - композиція гомотетії і повороту. Вона називається **центрально-подібним поворотом**.

Отже, власне перетворення подібності, відмінне від руху гомотетія, або центрально-подібний поворот.

Невласні перетворення подібності.

Згідно теореми 4 перетворення подібності f з коефіцієнтом k має єдину нерухому точку O ($k \neq 1$). За теоремою 3 $f = g * h$, де g – невласний рух. Так як O – нерухома точка руху g, то g – осьова симетрія. У цьому випадку f - композиція гомотетії і осьової симетрії і називається **центрально-подібною симетрією**.

Отже, існує три типи перетворення подібності, відмінного від руху:

1) Гомотетія.
2) Центрально-подібний переворот.
3) Центрально-подібна симетрія.

§ 9. Група подібності та її підгрупи

Позначимо P – множину всіх перетворень подібності. Покажемо, що P – група. Згідно теореми 1, потрібно перевірити дві умови: замкненість і існування оберненого елемента. Замкненість ми уже довели (див §7). Там ми показали, що композиція двох перетворень подібності буде подібністю (навіть вказали її коефіцієнт подібності $k = k_1 * k_2$).

Очевидно, що для будь-якого перетворення подібності f з коефіцієнтом k існує обернене f^{-1} з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$. Отже, множина P всіх перетворень подібності утворює групу. Операція тут – послідовне виконання двох перетворень подібності (їх композиція).

Називається вона **групою подібностей**.

Так як будь-який рух є частковим випадком перетворення подібності (подібність з коефіцієнтом $k=1$), то група рухів є підгрупою групи подібностей. Ясно що всі підгрупи групи рухів (див §5) будуть в свою чергу підгрупами і групи подібностей.

Розглянемо приклади інших підгруп групи P. Нехай P_1 – множина всіх власних перетворень подібності. Замкненість операції на цій множині очевидна (композиція двох власних перетворень подібності буде власним перетворенням подібності).

Існування оберненого до будь-якого власного перетворення подібності також очевидне. Отже, P_1 - група власних перетворень подібності, підгрупа групи P.

Позначимо $P(M_0)$ множину всіх гомотетій з центром в точці M_0. Неважко перевірити, що $P(M_0)$ – група, підгрупа групи P.

§ 10. Афінні перетворення

Перетворення площини називається **афінним**, якщо воно довільні три точки M_1, M_2, M_3 які лежать на одній прямій переводить в точки M_1', M_2', M_3', які належать одній прямій і зберігає їх просте відношення, тобто $(M_1'M_2', M_3') = (M_1M_2, M_3)$

Очевидно, що будь-яке перетворення подібності і будь-який рух являються афінними перетвореннями (оскільки вони зберігають просте відношення трьох точок).

Лема 1. *Якщо афінні перетворення f_1 і f_2 переводять дві точки A і B відповідно в точки A' і B', то $f_1(M) = f_2(M)$, де M довільна точка прямої AB.*

Доведення.

Нехай M – довільна точка прямої AB , відмінна від A і B, а $M' = f_1(M)$, $M'' = f_2(M)$.

Так як f_1 і f_2 – афінні перетворення, то $(AB, M) = (A'B', M')$ і $(AB, M) = (A'B', M'')$, тому $(A'B', M') = (A'B', M'') \Rightarrow M_1$ і M_2 співпадають, тобто $f_1(M) = f_2(M)$.

Теорема 5. *Нехай R=(A,B,C) і $R' = (A', B', C')$ – довільні репери площини. Тоді існує єдине афінне перетворення f, яке переводить репер R в R'. При цьому будь-яка точка M з даними координатами в репері R переходить в точку M' з тими ж координатами в репері R'.*

Доведення.

Покажемо спочатку, що таке афінне перетворення f існує. Поставимо у відповідність довільній точці *M* з координатами *x,y* в репері *R* точку M' з такими ж координатами в репері R': $M(x,y)_R \xrightarrow{f} M_1(x,y)_{R'}$. Відображення f буде взаємно-однозначним відображенням площини на себе, яке переводить *R* в R' (див. доведення теореми 2 §2).

Покажемо що f – афінне перетворення.

Нехай M_1, M_2, M – три довільні точки однієї прямої, які в репері *R* мають координати: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M(x, y)$.

Їх образи в репері R' мають такі ж координати: $M_1'(x_1, y_1)$, $M_2'(x_2, y_2)$, $M'(x, y)$.

Отже, $\lambda = (M_1M_2, M) = (M_1'M_2', M)$, оскільки в обох випадках ми маємо одні і ті ж формули ділення відрізка у відношенні λ:

$x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $\quad y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$. Тому *f* – афінне перетворення.

Доведемо єдиність перетворення *f*. Припустимо, що f_1- ще одне афінне перетворення, яке задовольняє умову теореми. Нехай *M* – довільна точка площини, а M' її образ при перетвореннях *f* і f_1.

Через точку *M* проведемо пряму так, щоб вона перетинала будь-які дві із прямих *AB, BC* або *AC* в різних точках *N* і *P* (рис.7)

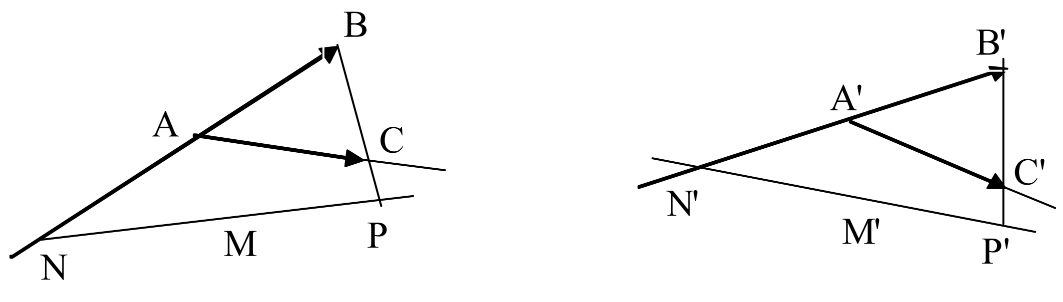

Рис.7

Згідно леми $f(N) = f_1(N) = N'$, $f(P) = f_1(P) = P' \Rightarrow f(M) = f_1(M) = M'$ отже, f і f_1 співпадають.

Тому f – єдине афінне перетворення, яке задовольняє умови теореми.

Наслідок. Якщо точки A, B, C, які не належать одній прямій, являють собою нерухомі точки афінного перетворення f, то f – тотожне перетворення.

Очевидно (як і для рухів), що будь-яке афінне перетворення або зберігає, або змінює орієнтацію площини (репери R і R' однаково або протилежно орієнтовані). Отримаємо афінні перетворення 1-го і 2-го роду.

§ 11. Аналітичне задання афінного перетворення. Група афінних перетворень

Нехай f – дане афінне перетворення. Виберемо на площині афінний репер R і точку M з координатами x і y у цьому репері. Тоді, згідно теореми 5, репер R перейде при перетворенні f в репер R', а точка M в точку M' з такими ж координатами x і y в R'. Позначимо x' і y' координати точки M' в репері R. Потрібно виразити x' і y' через x і y. Таким чином, задача зводиться до звичайної задачі перетворення афінних систем координат (див. § 15 [12]): точка M' в старому репері має координати x', y', а в новому x, y, виразити x', y' через x, y. Такі формули мають вигляд:

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + x_0, \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + y_0. \end{cases} \quad \textbf{(8)}$$

Визначник $\delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0$ – якщо афінне перетворення першого роду, $\delta < 0$ – афінне перетворення другого роду.

Зупинимося тепер на групі афінних перетворень та її підгрупах.

Позначимо через A множину всіх афінних перетворень площини. Покажемо, що A – група.

Розглянемо два афінних перетворення f_1 і f_2.

Тоді, за означення афінного перетворення, будь-які три точки A, B і C прямої перейдуть при перетворенні f_1 в точки A', B', C', причому просте відношення $(A'B', C') = (AB, C)$.

При перетворенні f_2 точки A', B' і C' перейдуть в точки A'', B'', C'' і $(A''B'', C'') = (A'B', C')$.

Таким чином послідовне виконання двох афінних перетворень f_1 і f_2 відобразить точки A, B і C в точки A'', B'', C'' і $(A''B'', C'') = (AB, C)$, тобто композиція двох афінних перетворень є афінним перетворенням. Замкненість доведено. Покажемо, що якщо $f \in A$, то і $f^{-1} \in A$.(існування оберненого) Дійсно, якщо точки A, B, C належать одній прямій, то за означенням і їх образи $A' = f^{-1}(A)$, $B' = f^{-1}(B)$, $C' = f^{-1}(C)$ також належать одній прямій і $(A'B', C') = (AB, C)$. Отже, множина A всіх афінних перетворень площини утворює групу.

Вона називається **групою афінних перетворень площини**.

Група подібності площини P і група D всіх рухів площини є підгрупами групи A. Очевидно, що і всі їх підгрупи є також підгрупами групи A. Неважко перевірити, що існують і інші підгрупи групи A. Наприклад, множина A_1 всіх афінних перетворень першого роду; множина $A(M_0)$ всіх афінних перетворень для яких M_0 – нерухома точка (група центрально-афінних перетворень); множина $A(a)$ всіх афінних перетворень, для яких пряма *a* складається з нерухомих точок.

ЗАДАЧІ

1. Записати аналітичне задання паралельного перенесення на вектор $\vec{p}$=(-3,5). Знайти образ при такому паралельному перенесенні: а) точки $M(2,3)$, б) прямої $4x–y+7=0$, в) прямої $5x+3y–11=0$.

2. Знайти образ вісі OX при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p}$=(4,7).

3. Знайти рівняння кола $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ після паралельного перенесення на вектор $\vec{p}$=(5,-1).

4. Записати аналітичне задання повороту навколо початку системи координат на кут $\lambda = \frac{\pi}{4}$. Знайти образ точки $M(2,-3)$ при цьому повороті.

5. Знайти образ прямої $x+2y+3=0$ при повороті її навколо точки $O(0,0)$ на кут $\lambda = -\frac{\pi}{3}$.

6. Отримати аналітичне задання центральної симетрії з центром в точці $A(x_0,y_0)$.

7. Знайти образи точок $M(1.3)$ і $N(-5,2)$ при симетрії відносно точки $A(4,5)$.

8. Знайти образ прямої $x+5y–4=0$ при симетрії відносно точки $A(2,-3)$.

9. Отримати аналітичне задання повороту на кут α навколо точки $A(x_0,y_0)$. Знайти образ точки $M(5,0)$ після повороту навколо точки $A(-1,3)$ на кут $\lambda = -\frac{\pi}{3}$.

10. Знайти образ прямої $2x+3y-4=0$ при осьовій симетрії відносно осі OX.

11. Знайти образ прямої $3x-5y+2=0$ при гомотетії з центром в точці $O(0,0)$ і коефіцієнтом $m=5$.

12. Отримати аналітичне задання гомотетії з центром в точці $A(x_0,y_0)$ і коефіцієнтом k.

13. Записати аналітичне задання гомотетії з центром в точці $A(4,1)$ і коефіцієнтом $k=2$. Знайти образ точки $M(-1,5)$ при цій гомотетії.

14. Записати аналітичне задання центрально-подібного повороту з центром в точці $O(0,0)$ на кут $\lambda = \frac{\pi}{4}$ і коефіцієнтом $k=2$. Знайти образи точок $M(\sqrt{2},4\sqrt{2})$ і $N(0,-2)$ при цьому перетворенні.

15. Отримати аналітичне задання центрально-подібного повороту з центром в точці $A(x_0,y_0)$.на кут α з коефіцієнтом k.

16. Аналітичне задання афінного перетворення має вигляд: $\begin{cases} x' = 2x - y + 1, \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Знайти: а) образи точок: $O(0,0)$, $A(-1,2)$, $B(3,-7)$,

b) образи векторів: $\vec{a}=(-3,.2)$, $\vec{b}=(-1,0)$, $\vec{c}=(5,3)$.

c) прообрази точок: $A'(0,10)$, $B'(2,4)$.

d) прообрази векторів: $\vec{a}' = (2,1)$, $\vec{b}' = (-1,3)$.

17. Афінне перетворення задано формулами: $\begin{cases} x' = x - 3y + 2, \\ y' = 2x + y - 3. \end{cases}$

Знайти: 1) образи прямих: а) вісі OX, б) вісі OY, в) $7x-7y+2=0$.

2) прообрази прямих: а) вісі OX, б) вісі OY, в) $3x-2y-2=0$.

18. Записати аналітичне задання афінного перетворення, яке три точки $A(1,0)$, $B(-2,1)$, $C(-1,1)$ переводить відповідно в точки:

а) $A'(3,1), B'(-4,-5), C'(0,2)$;

б) $A'(0,2)$, $B'(1,-4)$, $C'(-1,-2)$.

19. Записати аналітичне задання афінного перетворення, яке початок системи координат переводить в точку $O'(3,2)$, а всі точки прямої $3x+4y+1=0$ залишає нерухомими.

20. Вияснити, які з перетворень є: 1) рухами; 2) подібністю, якщо вони задані наступними співвідношеннями:

а) $x' = 2x,\ y' = 2y$;

б) $x' = 3x,\ y' = y$;

в) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1,\quad y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 15$;

г) $x' = 3x+4y,\ y' = 5x-6y$;

д) $x' = x,\ y' = y$;

е) $x' = 8x-y+1,\ y' = x+8y$.

21. Вияснити характер перетворення, якщо воно має аналітичне задання:

1) $x' = -x+1,\ y' = -y;$

2) $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1,\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $x' = -x-6,\ y' = y$;

4) $x' = x+3,\ y' = -y$;

5) $x' = -5y,\ y' = 5x$;

6) $x' = 3x,\ y' = 5y$;

7) $x' = \frac{3}{2}\sqrt{3}x - \frac{3}{2}y,\ y' = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{3}y$;

8) $x' = 2x,\ y' = -2y$;

9) $x' = -3y-7,\ y' = 3x+1$.

22. Довести, що множина $A(a)$ всіх афінних перетворень, для яких пряма a складається з нерухомих точок утворює групу.

Розділ 2

Квадратичні форми

§ 12. Поняття квадратичної форми

Відомо, що рівняння першої степені від двох змінних: $Ax+By+C=0$ визначає пряму лінію на площині, рівняння $Ax+By+Cz+D=0$ визначає площину у тривимірному векторному просторі. Аналогічно, в n –вимірному векторному просторі рівняння першої степені від n змінних визначає так-звану гіперплощину. Зустрічалися нам і рівняння кола та сфери, які є рівняннями другої степені. На площині нам відомі і інші лінії: гіпербола, парабола, еліпс. В просторі поверхні: циліндричні, канонічні і т. д. Зрозуміло що деякі криві і поверхні можуть мати рівняння і вище другої степені, але основні лінії: еліпс, парабола, гіпербола, та поверхні: сфера, еліпсоїд, параболоїди, гіперболоїди задаються якраз рівняннями другої степені. Відмітимо, що еліпс, парабола та гіпербола вивчалися ще стародавніми греками. Аполлоній описав їх основні властивості ще в третьому столітті до нашої ери. Ці криві часто використовуються в фізиці, астрономії, архітектурі.

Лінією (кривою) другого порядку на площині будемо називати лінію, яка визначається рівнянням другої степені.

Загальне рівняння другої степені від двох змінних має вигляд:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \qquad \textbf{(7)}$$

де a_{11}, a_{22}, a_{12} не рівні нулю одночасно.

Поверхнею другого порядку будемо називати поверхню, яка визначається рівнянням другої степені.

Очевидно, що таке рівняння, в загальному випадку, має вигляд:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0, \qquad \textbf{(8)}$$

де коефіцієнти $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ не рівні нулю одночасно.

Відмітимо, що при переході від однієї системи координат до іншої рівняння другої степені перейде в рівняння другої степені.

Однією з основних задач аналітичної геометрії є зведення рівнянь (7) та (8) до канонічного вигляду:

$\boldsymbol{Ax'^2+By'^2=Q}$ або $\boldsymbol{Ax'^2+By'^2+Cz'^2}=Q$, де Q – многочлен не вище першої степені.

По аналогії з трьохвимірним векторним простором (див. §17 [12]), можна отримати формули перетворення афінних систем координат в n–вимірному векторному просторі:

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\ldots+c_{1n}y_n+c_1, \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\ldots+c_{2n}y_n+c_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\ldots+c_{nn}y_n+c_n\ , \end{cases}$$

де нові базисні вектори і новий початок координат мають координати: $\vec{e}\,'_1=(c_{11}, c_{21}, \ldots , c_{n1})$, … , $\vec{e}\,'_n=(c_{1n}, c_{2n}, \ldots , c_{nn})$, $O'(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ в старому базисі.

Квадратичною формою від *n*–змінних $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ називається однорідна функція другої степені від цих змінних, тобто функція вигляду:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j\ ,\quad \text{де } (a_{ij}=a_{ji}) \qquad \textbf{(9)}$$

Ясно, що в рівнянні (7) квадратична форма $F(x)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy$, а в рівнянні (8) $F(x)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$.

Квадратична форма називається **канонічною**, якщо вона має вигляд: $F(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2$ **(10)**

§ 13. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду в *n*-вимірному векторному просторі

Теорема 6.

У n-вимірному векторному просторі завжди існує такий базис в якому квадратична форма (9) має канонічний вигляд (10).

Доведення:

Розглянемо квадратичну форму (9): $F(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j$

Покажемо, що за допомогою заміни базису ця квадратична форма може бути приведена до канонічного вигляду.

Скористаємося методом математичної індукції:

1. Нехай $n=1$ тоді $F(x)=a_{11}x_1^2$ отже, квадратична форма в канонічному вигляді.

2. Нехай $n>1$. Будемо вважати твердження теореми вірним для квадратичної форми від меншого ніж n числа змінних.

Розглянемо два випадки:

а). Серед коефіцієнтів a_{ii} $(i=1,\dots,n)$ квадратичної форми (9) є відмінні від нуля. Нехай, наприклад, $a_{11}\neq 0$, тоді згрупуємо всі члени, які містять x_1 і запишемо:

$$\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)^2=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{1n}x_1x_n+A=$$

$= a_{11}x_1^2+ \sum_{i=2}^{n} 2a_{1i}x_1x_n + A$, де A – многочлен, який не містить x_1.

Таким чином квадратичну форму $F(x)$ можна записати так:

$$F(x)=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)^2+G(x_2,x_3,\ldots,x_n).$$

Позначимо:

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\,, \\ y_2=x_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ y_n=x_n\,. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1}{a_{11}}y_1-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}y_2-\ldots-\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}y_n\,, \\ x_2=y_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=y_n\,. \end{cases} \quad \textbf{(11)}$$

Після заміни базису за останніми формулами перетворення афінних систем координат, отримаємо квадратичну форму:

$F(y)=\dfrac{1}{a_{11}}y_1^2+G(y_2,y_3,\ldots,y_n)$, де $G(y_2,y_3,\ldots,y_n)$ квадратична форма від n-1 змінної, яка за припущенням індукції приводиться до канонічного вигляду.

б). Всі коефіцієнти квадратичної форми $a_{11}=a_{22}=\ldots=a_{nn}=0.$ Тоді існують коефіцієнти $a_{ij}\neq 0.$ В такому випадку потрібно так замінити базис, щоб появилися квадрати змінних. Нехай для конкретності $a_{12}\neq 0.$ Тоді квадратична форма $F(x)=2a_{12}x_1x_2+\ldots$. Використаємо формули перетворення афінних систем координат:

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2, \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ x_n=y_n. \end{cases} \quad \textbf{(12)}$$

Після заміни базису, отримаємо:

$F(y)=2a_{12}(y_1^2 - y_2^2)+\ldots$. Отже, в квадратичній формі появилися квадрати змінних і маємо перший випадок.

Приклад 1. Привести квадратичну форму до канонічного вигляду і знайти базис у якому вона має такий вигляд:

а) $F(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Розв'язання. Оскільки квадрати змінних в даній квадратичній формі відсутні, то маємо випадок б) теореми 6. Скористаємося формулами (12):

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = y_3. \end{cases} \qquad (*)$$

Отримаємо

$$F(y) = (y_1 - y_2)\cdot(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)y_3 + (y_1 + y_2)y_3 = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3.$$

Згрупуємо всі додатки, які містять y_1 (за теоремою 6, випадок а) отримаємо):

$$F(y) = (y_1 + y_3)^2 + G(y_2, y_3) = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

Згідно формул (11) в цьому випадку отримаємо формули переходу до нової системи координат:

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3 \end{cases} \qquad (**)$$

В новій системі координат квадратична форма має канонічний вигляд:

$$F(z) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

Так як базис замінювався двічі, то загальні формули перетворення отримаємо, підставивши рівності (**) в (*).

Одержимо:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 - z_3, \\ x_2 = z_1 + z_2 - z_3, \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

Таким чином квадратична форма $F(x)$ матиме канонічний вигляд $F(z)$ в базисі: $\overrightarrow{e_1'} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{e_2'} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{e_3'} = (-1, -1, 1)$.

b) $F(x) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Розв'язання. Згрупуємо всі доданки, які містять x_1 (за теоремою 6 випадок а):

$$F(x) = \frac{1}{5}(5x_1 - 2x_2 - x_3)^2 + G(x_2, x_3) =$$

$$\frac{1}{5}(5x_1 - 2x_2 - x_3)^2 + 1\frac{1}{5}x_2^2 + 4\frac{4}{5}x_3^2 - 4\frac{4}{5}x_2x_3.$$

Після заміни базису отримаємо:

$$F(y) = \frac{1}{5}y_1^2 + 1\frac{1}{5}y_2^2 + 4\frac{4}{5}y_3^2 - 4\frac{4}{5}y_2y_3..$$

Формули відповідного перетворення систем координат матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}y_1 + \frac{2}{5}y_2 + \frac{1}{5}y_3, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

Згрупувавши доданки, які містять y_2 (аналогічно до попереднього), отримаємо:

$$F(y) = \frac{1}{5}y_1^2 + \frac{5}{6}\left(1\frac{1}{5}y_2 - 2\frac{2}{5}y_3\right)^2 + G(y_3) =$$

$$= \frac{1}{5}y_1^2 + \frac{5}{6}\left(1\frac{1}{5}y_2 - 2\frac{2}{5}y_3\right)^2 + 0.$$

Після заміни базису за формулами:

$$\begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = \frac{5}{6} z_2 + 2z_3, \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$ отримаємо квадратичну форму в канонічному вигляді: $F(z) = \frac{1}{5} z_1^2 + \frac{5}{6} z_2^2$.

Загальні формули перетворення афінних систем координат, які зводять квадратичну форму $F(x)$ до канонічного вигляду $F(z)$ матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5} z_1 + \frac{1}{3} z_2 + z_3, \\ x_2 = \frac{5}{6} z_2 + 2z_3, \\ x_3 = z_3. \end{cases} .$$

Базисні вектори нової системи координат: $\overrightarrow{e_1'} = \left(\frac{1}{5}, 0, 0 \right)$, $\overrightarrow{e_2'} = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, 0 \right)$, $\overrightarrow{e_3'} = (1, 2, 1)$.

§ 14. Криві другого порядку та їх класифікація.

Кривою другого порядку називається множина всіх точок площини, координати яких в деякій афінній системі координат задовольняють рівняння (7):

$\boldsymbol{a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,}$

де a_{11}, a_{22}, a_{12} не рівні нулеві одночасно.

За теоремою 6 квадратична форма $F(x,y)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy= =\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x+a_{12}y)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} y^2 + a_{22}y^2.$

Використавши формули перетворення

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = y\,, \end{cases}$$

будемо мати: $F(x',y') = \dfrac{1}{a_{11}}x'^2 - \left(\dfrac{a_{12}^2}{a_{11}} - a_{22}\right)y'^2$.

Позначивши $\dfrac{1}{a_{11}} = \lambda_1$, $\dfrac{a_{12}^2}{a_{11}} - a_{22} = -\lambda_2$, отримаємо квадратичну форму в канонічному вигляді: $F(x',y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$.

Після перетворення за формулами

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a_{11}}x' - \dfrac{a_{12}}{a_{11}}y', \\ y = y'\,, \end{cases}$$

рівняння (7) приймає вигляд:

$$\boldsymbol{\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0} \qquad \textbf{(13)}$$

Якщо ж у рівнянні (7) $a_{11} = a_{22} = 0$, то $a_{12} \neq 0$ і використавши формули $\begin{cases} x = x' - y', \\ y = x' + y', \end{cases}$ приходимо до розглянутого випадку.

Зупинимось на рівності (13). Згрупуємо однакові змінні і вилучимо повні квадрати:

$$\lambda_1\left(x'^2 + \frac{2a'_{13}x'}{\lambda_1} + \frac{a'^2_{13}}{\lambda_1^2}\right) - \frac{a'^2_{13}}{\lambda_1} + \lambda_2\left(y'^2 + \frac{2a'_{23}y'}{\lambda_2} + \frac{a'^2_{23}}{\lambda_2^2}\right) - \frac{a'^2_{23}}{\lambda_2} + a'_{33} = 0.$$

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_{13}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_1\left(y' + \frac{a'_{23}}{\lambda_2}\right)^2 - \frac{a'^2_{13}}{\lambda_1} - \frac{a'^2_{23}}{\lambda_2} + a'_{33} = 0,$$

Перенесемо систему координат в точку $O'\left(-\dfrac{a'_{13}}{\lambda_1};-\dfrac{a'_{23}}{\lambda_2}\right)$. Запишемо формули такого паралельного перенесення:

$$\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{a'_{13}}{\lambda_1}, \\ y'' = y' + \dfrac{a'_{23}}{\lambda_2}. \end{cases}$$

Рівняння кривої в новій системі координат матиме вигляд:

$\boldsymbol{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 = 0}$, де $\boldsymbol{\lambda_3} = -\dfrac{a_{13}'^2}{\lambda_1} - \dfrac{a_{23}'^2}{\lambda_2} + a_{33}'$ Нехай $\boldsymbol{\lambda_3 \neq 0}$.

Перенісши число λ_3 в праву частину і розділивши на нього отримаємо:

$$\frac{\lambda_1 x''^2}{-\lambda_3} + \frac{\lambda_2 y''^2}{-\lambda_3} = 1, \text{ або } \frac{x''^2}{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} = 1.$$

1. Якщо знаменники додатні, то запишемо $\dfrac{x''^2}{a^2} + \dfrac{y''^2}{b^2} = 1$, це канонічне рівняння **еліпса**.

2. Якщо знаменники мають різні знаки, то отримаємо канонічне рівняння **гіперболи**: $\dfrac{x''^2}{a^2} - \dfrac{y''^2}{b^2} = 1$,

3. Якщо знаменники від'ємні, то отримаємо рівняння **уявного еліпса:** $\dfrac{x''^2}{a^2} + \dfrac{y''^2}{b^2} = -1$,

У випадку коли $\boldsymbol{\lambda_3 = 0}$, маємо рівняння $\boldsymbol{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0}$.

4. Якщо λ_1 і λ_2 мають однакові знаки, то крива називається **парою уявних прямих, що перетинаються** в точці *O(0;0)*. Її рівняння можна записати у вигляді: $\dfrac{x''^2}{a^2} + \dfrac{y''^2}{b^2} = 0$.

5. Якщо λ_1 і λ_2 мають різні знаки, то крива розпадається на **пару прямих, що перетинаються** в точці *O(0;0)*. Її рівняння:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0.$$

Повернемося до рівняння (13).

Можливий випадок, коли в цьому рівнянні один з коефіцієнтів біля квадратів змінних рівний нулю. Наприклад, $\boldsymbol{\lambda_2 = 0}$, а інші коефіцієнти біля змінних відмінні від нуля. Тоді, згрупувавши першу змінну і виділивши повний квадрат, аналогічно до попереднього, отримаємо:

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_{13}}{\lambda_1}\right)^2 + 2a'_{23}\left(y' - \frac{a'^2_{13}}{2a'_{23}\lambda_1} + \frac{a'_{33}}{2a'_{23}}\right) = 0\ .$$

Після паралельного перенесення в точку $O'\left(-\frac{a'_{13}}{\lambda_1}, \frac{a'^2_{13}}{2a'_{23}\lambda_1} - \frac{a'_{33}}{2a'_{23}}\right)$, приходимо до рівняння $\lambda_1 x''^2 + 2a'_{23}y'' = 0$.

Звідки $\lambda_1 x''^2 = -2a'_{23}y''$.

6. Позначивши $-a'_{23} = \lambda_1 p$, отримаємо рівняння **параболи**:

$x''^2 = 2py''$.

Якщо у рівнянні (13) $\boldsymbol{\lambda_2 = a'_{23} = 0}$, то маємо рівняння лише від однієї змінної, згрупувавши яку і виділивши повний квадрат,

отримаємо: $\lambda_1 x''^2 + a'_{33} - \frac{a'^2_{13}}{\lambda_1} = 0$, або $x''^2 = -\frac{a'_{33}}{\lambda_1} + \frac{a'^2_{13}}{\lambda_1^2}$.

7. Якщо права частина рівності додатна, то її можна записати: $\boldsymbol{x''^2 = a^2}$. Маємо **пару паралельних прямих**.

8. Якщо права частина рівності від'ємна, то отримаємо **пару уявних паралельних прямих**: $\boldsymbol{x''^2 = -a^2}$.

9. Якщо права частина рівності дорівнює нулю, то отримаємо **пару прямих, що співпадають**: $\boldsymbol{x''^2 = 0}$.

Таким чином отримали 9 типів кривих другого порядку на площині:

№ п/п	Назва кривої	Канонічне рівняння
1.	Еліпс.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
2.	Гіпербола.	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
3.	Парабола.	$x^2 = 2py$
4.	Уявний еліпс.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$

5.	Пара прямих, що перетинаються в точці О (0,0).	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
6.	Пара уявних прямих, що перетинаються в точці О (0,0).	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
7.	Пара паралельних прямих.	$x^2 = a^2$
8.	Пара уявних паралельних прямих.	$x^2 = -a^2$
9.	Пара прямих, що співпадають.	$x^2 = 0$

Система координат, в якій крива має канонічне рівняння називається **канонічною**.

Фактично ми довели теорему:

Теорема 7.

Існує 9 і тільки 9 типів кривих другого порядку.

§ 15. Поверхні другого порядку та їх класифікація.

Аналогом кривих другого порядку являються в просторі поверхні другого порядку.

Поверхнею другого порядку називається множина всіх точок простору, координати яких в деякій афінній системі координат задовольняють рівняння (8):

$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0,$

де коефіцієнти a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} не рівні нулю одночасно.

Міркуючи аналогічно, як і у випадку кривих, ми за теоремою 6, а потім, згрупувавши однакові змінні і виділивши повні квадрати, одержимо канонічне рівняння поверхні другого порядку: $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+Q=0$, де Q – многочлен не вище першої степені. Розглянувши всі можливі випадки, які можна отримати з цього рівняння (аналогічно із кривими), одержимо класифікацію поверхонь другого порядку:

№ п/п	Назва поверхні	Канонічне рівняння
1	Еліпсоїд.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
2	Уявний еліпсоїд.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$
3	Однопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
4	Двопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
5	Уявний конус, одна дійсна точка *O(0,0,0)*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$
6	Конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
7	Еліптичний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$
8	Гіперболічний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$
9	Еліптичний циліндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
10	Гіперболічний циліндр	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
11	Уявний циліндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
12	Пара площин, що перетинаються (по вісі *OZ*)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
13	Пара уявних площин, що перетинаються по дійсній прямій (вісь *OZ*)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
14	Параболічний циліндр	$y^2=2px$

15	Пара паралельних площин	$x^2 = a^2$
16	Пара уявних паралельних площин	$x^2 = -a^2$
17	Пара площин, що співпадають	$x^2 = 0$

Теорема 8.
Існує 17 типів поверхонь другого порядку.

§ 16. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду в евклідовому векторному просторі

Для зведення квадратичної форми до канонічного вигляду в евклідовому просторі можна скористатися, наприклад, методом ортогональних перетворень, який детально розглядається в лінійній алгебрі. Суть його в тому, що симетричну матрицю можна звести до діагонального вигляду за допомогою деякого ортогонального перетворення (тобто переходу від однієї прямокутної системи координат до іншої прямокутної системи координат). Причому діагональними елементами отриманої матриці будуть різні корені характеристичного рівняння даної матриці, а нові базисні вектори знаходимо нормувавши власні вектори, що відповідають характеристичним кореням.

Зупинимося на цьому методі більш детально.

Розглянемо квадратичну форму від трьох змінних:

$F(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz.$

Щоб привести квадратичну форму до канонічного вигляду і знайти формули перетворення систем координат, потрібно:

1. Скласти матрицю квадратичної форми $F(x,y,z)$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ де } a_{ij}=a_{ji},$$

та розв'язати її характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ (так як матриця A симетрична, то отримаємо три дійсних кореня: λ_1, λ_2, λ_3).

2. Записати канонічний вигляд квадратичної форми $F(x',y',z')=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2$.

3. Знайти власні вектори лінійного оператора, що має ту ж матрицю, що і дана квадратична форма. Їм відповідають характеристичні корені $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

4. Пронормувавши власні вектори, отримаємо базис $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ в якому квадратична форма має канонічний вигляд.

5. Знаючи координати нових базисних векторів, записуємо формули перетворення прямокутних систем координат (див. [12, § 17]).

Ми розглянули випадок, коли характеристичні корені $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ різні. Що робити, коли серед характеристичних коренів є однакові, покажемо на прикладі 17.

Приклад 2.

За допомогою ортогонального перетворення евклідового векторного простору R_3 привести до канонічного вигляду квадратичну форму $2x_1^2+3x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$ і знайти формули відповідного перетворення.

Розв’язання: Запишемо матрицю квадратичної форми:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ і складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Обчисливши визначника, одержимо:

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 10 = 0$ або $\lambda^3 + \lambda^2 - 7\lambda^2 - 7\lambda + 10\lambda + 10 = 0$ і $(\lambda^2 - 7\lambda + 10)(\lambda + 1) = 0$.

Звідки отримаємо: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$.

Отже, **квадратична форма має канонічний вигляд:**

$5y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$.

Залишається отримати формули перетворення. Визначимо ортонормований базис $\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}$ в якому квадратична форма має канонічний вигляд.

Нові базисні вектори є власними векторами лінійного оператора, що має ту ж матрицю, що і дана квадратична форма; отже, їх координати задовольняють системі рівнянь:

$$\begin{cases} (2-\lambda)u_1 - 2u_2 + 2u_3 = 0, \\ -2u_1 + (3-\lambda)u_2 = 0, \\ 2u_1 + (1-\lambda)u_3 = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Знайдемо вектор $\vec{i'}$, який відповідає власному значенню $\lambda_1 = 5$. Для цього в системі рівнянь (*) покладемо $\lambda = 5$. Отримаємо:

$$\begin{cases} -3u_1 - 2u_2 + 2u_3 = 0, \\ -2u_1 - 2u_2 = 0, \\ 2u_1 - 4u_3 = 0 \end{cases}.$$

Знайдемо який-небудь з розв'язків одержаної системи. Вважаючи, наприклад, $u_3 = 1$ одержимо, що $u_1 = -u_2 = 2$. Вектор $\overrightarrow{p} = (2;-2;1)$ – один з власних векторів, який відповідає значенню $\lambda_1 = 5$. Щоб отримати шуканий вектор $\vec{i}'$, потрібно нормувати цей вектор $\overrightarrow{p}$:

$$\vec{i}' = \frac{\overrightarrow{p}}{|\overrightarrow{p}|} = \left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right).$$

Для знаходження другого базисного вектора $\vec{j}'$, який відповідає власному значенню $\lambda_2 = 2$, покладемо в (*) $\lambda = 2$ і отримаємо систему:

$$\begin{cases} -2u_2 + 2u_3 = 0, \\ -2u_1 + u_2 = 0, \\ 2u_1 - u_3 = 0. \end{cases}$$

Як і вище, знайдемо: $\vec{j}' = \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Нарешті, при $\lambda = -1$ одержимо: $\vec{k}' = \left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

Отже, формули перетворення мають вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_2 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3, \\ x_3 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3. \end{cases}$$

Якщо підставити ці значення x_1, x_2, x_3 в дану квадратичну форму, то отримаємо її канонічний вигляд. Цим можна скористатися для перевірки правильності розв'язку.

Приклад 3.

За допомогою ортогонального перетворення евклідового векторного простору R_3 привести до канонічного вигляду квадратичну форму $4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2$ і знайти формули цього перетворення.

Розв'язання: Аналогічно до попереднього приклада складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ або } (5-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda\right) = 0;$$

його корені: $\lambda_1 = \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 0$.

Шуканим **канонічним виглядом даної квадратичної форми є форма** $5y_1^2 + 5y_2^2$**.**

Знайдемо базис, в якому дана квадратична форма має канонічний вигляд.

Відмінність цієї задачі від попередньої полягає у тому, що тепер характеристичне рівняння має кратний корінь 5. Цьому кореню відповідають два вектори $\vec{i'}$ і $\vec{j'}$ нового базису.

Запишемо для даної квадратичної форми систему:

$$\begin{cases} (4-\lambda)u_1 + 2u_2 = 0, \\ 2u_1 + (1-\lambda)u_2 = 0, \\ (5-\lambda)u_3 = 0. \end{cases} \qquad (\alpha)$$

При $\lambda = 5$ отримаємо систему, еквівалентну одному рівнянню:

$$u_1 - 2u_2 = 0 \qquad (\beta)$$

Один з розв'язків цього рівняння виберемо довільно. Прийнявши, наприклад, $u_2 = 1$ одержимо, що $u_1 = 2$. Третя координата вектора може бути довільною. Нехай $u_3 = 0$. Отримаємо вектор $\vec{p} = (2;1;0)$. Нормуючи цей вектор, одержимо один з шуканих векторів:

$$\vec{i'} = \frac{\vec{p}}{\left|\vec{p}\right|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}};0\right).$$

Потім знайдемо вектор $\vec{q}$, ортогональний вектору $\vec{p}$ і такий, що його координати задовольняють рівняння (β). Використовуючи умову перпендикулярності векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, одержимо для знаходження координат вектора $\vec{q}$ наступну систему:

$$\begin{cases} u_1 - 2u_2 = 0, \\ 2 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо, що $u_1 = u_2 = 0$; u_3 можна взяти рівним будь-якому числу, відмінному від нуля, але, оскільки ми шукаємо одиничний вектор, краще вибрати $u_3 = 1$. Тоді

$$\vec{j'} = \vec{q} = (0;0;1).$$

Щоб знайти вектор $\vec{k'}$, покладемо в системі (α) $\lambda = 0$.

Отримаємо: $\begin{cases} 4u_1 + 2u_2 = 0, \\ 2u_1 + u_2 = 0, \\ 5u_3 = 0. \end{cases}$

Одним з розв'язків цієї системи є: $u_1 = 1,\ u_2 = -2,\ u_3 = 0$. Нормуючи одержаний вектор $\vec{r} = (1;-2;0)$, знайдемо вектор

$$\vec{k'} = \frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}};0\right)$$

Запишемо формули ортогонального перетворення, яке приводить дану квадратичну форму до канонічного вигляду:

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_3), \\
x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(y_1 - 2y_3), \\
x_3 = y_2.
\end{cases}
$$

Оскільки при знаходженні вектора $\vec{i}'$ його третя координата вибиралася довільно, то існує нескінченне число перетворень, які приводять дану квадратичну форму до отриманого канонічного вигляду. Ми знайшли формули тільки одного із них.

ЗАДАЧІ

За допомогою заміни базису афінного простору знайти канонічний вигляд квадратичної форми і записати формули перетворення координат.

1. $9x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$.

2. $x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

3. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

4. $2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3$.

5. $x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$.

6. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

7. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 8x_3^2$.

8. $x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

9. $x_1x_2 - 3x_1x_3 + x_2x_3$.

10. $2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

11. $4x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4$.

12. $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_3x_4$.

13. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_4$.

14. $4x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4$.

Привести квадратичну форму до канонічного вигляду:

15. $x_1x_2 + x_2x_3$;

16. $4x_1^2 + 12x_2^2 - 13x_3^2 - 16x_1x_2 + 8x_2x_3$;

17. $x_1^2 + 18x_2^2 + 9x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 30x_2x_3$;

18. $4x_1^2 + 5x_2^2 + 13x_3^2 + 4x_1x_2 - 20x_1x_3 - 18x_2x_3$;

19. $x_1^2 + 5x_2^2 + 24x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;

20. $x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_1x_4$;

21. $x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_4^2 - 4x_1x_2 + 20x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + 6x_3x_4$;

22. $x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_4 - 4x_3x_5$.

За допомогою ортогонального перетворення евклідового векторного простору E_2 привести до канонічного вигляду квадратичну форму і записати формули цього перетворення:

23. $5x_1^2 - 8x_1x_2 - x_2^2$;

24. $x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$;

25. $3x_1x_2$;

26. $7x_1^2 - 24x_1x_2$.

Привести до канонічного вигляду рівняння кривої за допомогою переходу до нової прямокутної системи координат. Виявити вид кривої і знайти формули перетворення координат у просторі E_2:

27. $x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 - 12 = 0$;

28. $x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 + 10x_1 + 70x_2 = 0$;

29. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 20x_1 - 10x_2 + 0 = 0$;

30. $5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 20x_1 + 16x_2 + 11 = 0$;

31. $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 - 4x_2 - 9 = 0$.

Привести до канонічного вигляду рівняння поверхні за допомогою переходу до нової прямокутної системи координат. Вказати вид поверхні і знайти формули перетворення координат у просторі E_3:

32. $3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6 = 0$.

33. $4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 6x_1 + 12x_3 = 0$;

34. $9x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 - 24x_2 - 8x_3 - 24 = 0$;

35. $4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3 + 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0$;

36. $x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2x_3 + 2x_2 - 4x_3 + 1 = 0$.

37. $2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1 + 8x_2 - 10 = 0$.

Розділ 3

Криві другого порядку

§ 17. Еліпс

Еліпсом називається множина всіх точок площини координати яких, в деякій прямокутній системі координат, задовольняють рівняння: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, **(14)**

де $a \geq b>0$.

Якщо $a=b$, то маємо коло. Еліпс можна отримати з кола стисканням до вісі OX.

З рівняння еліпса маємо: $\frac{x^2}{a^2}\leq 1 \;\Rightarrow\; -a\leq x\leq a$, аналогічно $\frac{y^2}{b^2}\leq 1 \;\Rightarrow\; -b\leq y\leq b$. Отже, еліпс – це фігура обмежена прямокутником із сторонами $2a$ і $2b$.

Так як змінні в рівняння еліпса входять лише в другій степені, то еліпс симетричний відносно координатних осей і початку системи координат.

Точки A_1, A_2, B_1, B_2, в яких еліпс перетинає вісі системи координат, називаються **вершинами** еліпса.

Відмітимо елементи еліпса, які не залежать від орієнтації координатних осей:

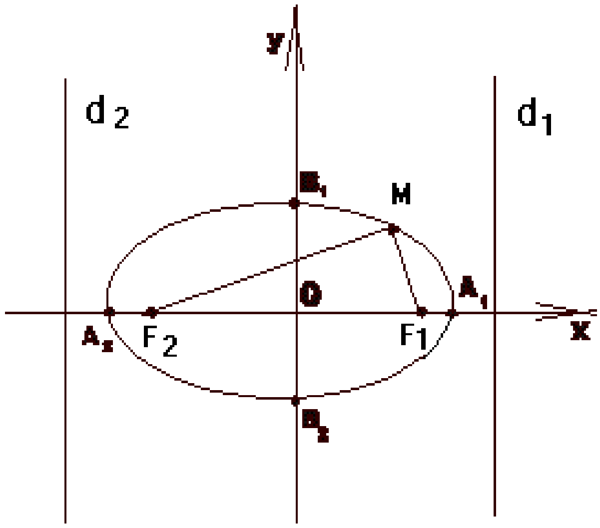

Рис.8

1. число a – **велика піввісь** ($2a$ –велика вісь),

2. число b **– мала піввісь** ($2b$ – мала вісь),

3. $2c$ – **фокальна відстань** ($c^2=a^2-b^2$),

4. $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ – **ексцентриситет** ($0<\varepsilon<1$),

5. точка $O(0,0)$ – **центр** еліпса,

6. $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ – **вершини** еліпса,

7. Точки $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ називаються **фокусами,**

8. прямі d_1 і d_2, які мають рівняння: $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, називаються **директрисами** еліпса (не мають спільних точок з еліпсом).

Розглянемо довільну точку M, яка належить еліпсу. Відрізки, які сполучають її з фокусами називаються **фокальними радіусами точки *М*** (довжини цих відрізків також називають фокальними радіусами точки M).

Нехай точка M еліпса має координати x, y. Тоді $|MF_2|=$ $=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. Так як точка M належить еліпсу, то її координати задовольняють рівняння еліпса: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, звідки $y^2=b^2(1-\dfrac{x^2}{a^2})$.

Отже,

$$|MF_2|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2}=$$

$$=\sqrt{(\varepsilon x+a)^2}=|\,\varepsilon x+a\,|.$$

Аналогічно міркуючи, отримаємо: $|MF_1| = |-\varepsilon x + a|$.

Так як для всіх точок еліпса $\varepsilon x < a$,то модулі приймають лише додатні значення, тому: $|MF_1| = -\varepsilon x + a$, $|MF_2| = \varepsilon x + a$.

Тоді $|MF_1| + |MF_2| = 2a$.

Отже, ми отримали геометричне означення еліпса:

Еліпсом називається множина всіх точок площини сума відстаней від яких до двох даних точок (фокусів) є величина постійна (рівна $2a$).

Параметричні рівняння еліпса.

Нехай задано еліпс канонічним рівнянням: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

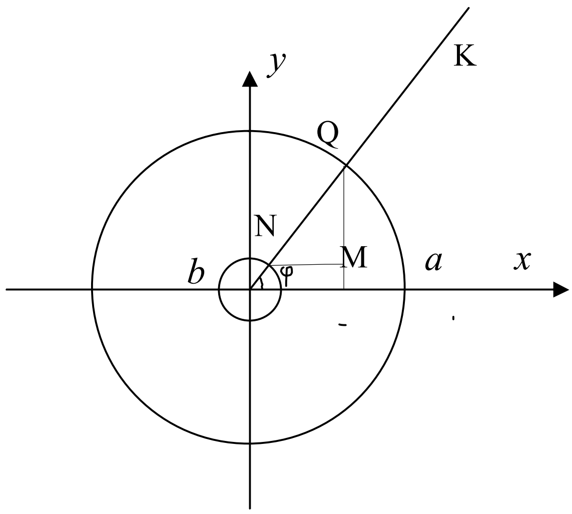

Рис. 9

Побудуємо в прямокутній системі координат два концентричні кола радіусами a і b, $a>b$ (рис.9).

Проведемо промінь OK . Нехай він утворює з віссю OX кут φ. Точки перетину променя з колами позначимо N і Q. Проведемо через точку N пряму паралельну до осі OX, а через Q пряму паралельну до OY. В перетині цих прямих отримаємо точку $M(x, y)$. Тоді $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$. Покажемо, що точка $M(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ належить еліпсу. Дійсно, її координати задовольняють рівняння: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, отже вона належить еліпсу.

Таким чином ми отримали **параметричні рівняння еліпса**:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=a\cos\varphi}, \\ \boldsymbol{y=b\sin\varphi}, \end{cases}$$ де φ – параметр ($0 \le \varphi < 2\pi$).

Приклад 4.

У прямокутній системі координат дана точка $A(1,0)$ та пряма $x = 2$. Скласти рівняння лінії, кожна точка $M(x,y)$ якої вдвічі ближче до точки A, ніж до даної прямої;

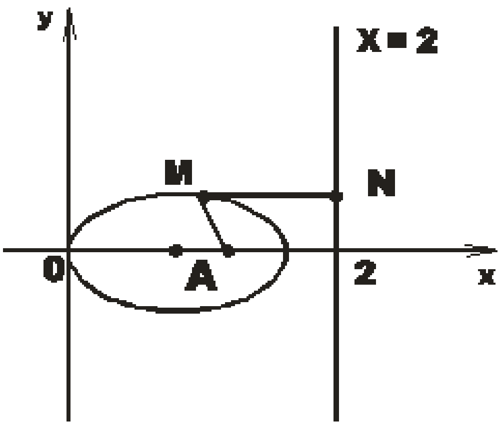

Рис. 10

Розв'язання: За умовою $2MA=MN$ (рис. 10). Очевидно, що точка N має координати $N(2,y)$. Отже, отримаємо:

$$2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2},$$

$$4(x^2-2x+1+y^2)=x^2-4x+4,$$

$$3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)+4y^2=\frac{4}{3},$$

$$3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+4y^2=\frac{4}{3}, \qquad \frac{\left(x-2/3\right)^2}{4/9}+\frac{y^2}{1/3}=1.$$

Таким чином шукана лінія – еліпс. Точка A співпадає з його правим фокусом, а пряма $x=2$ являється його правою директрисою;

Приклад 5.

Привести до канонічного вигляду рівняння кривої

$4x^2+9y^2+32x-54y+109=0$ та побудувати її.

Розв'язання: Доповнимо члени, що містять x, та члени, що містять y, до повних квадратів. Отримаємо:

$$4(x^2+8x+16)+9(y^2-6y+9)=64+81-109=36,$$

$$4(x+4)^2+9(y-3)^2=36, \qquad .$$

$$\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1,$$

тобто маємо еліпс, центр якого знаходиться у точці $C(-4, 3)$, велика піввісь якого $a=3$, а мала піввісь $b=2$ (рис.11).

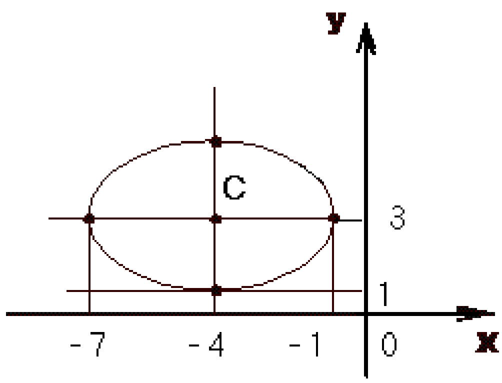

Рис.11

§ 18. Гіпербола.

Гіперболою називається множина всіх точок площини координати яких, в деякій прямокутній системі координат, задовольняють рівняння: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **(15)**

З рівняння гіперболи маємо:

$$\frac{x^2}{a^2}\geq 1 \Rightarrow |x|\geq a \Rightarrow x\geq a, x\leq -a.$$

Отже, між прямими $x = a$ і $x = -a$ немає точок гіперболи.

Так як в рівняння гіперболи входять тільки змінні парної степені, то гіпербола симетрична відносно осей *OX, OY* і початку системи координат. Ясно, що інших осей симетрії гіпербола не має, так як будь-яка вісь її симетрії проходить через точку *O*, а значить являється і віссю симетрії кола $x^2+y^2=a^2$, яке має з гіперболою дві спільні точки $A_1(a,0)$ та $A_2(-a,0)$; тому будь-яка вісь симетрії переводить A_1 в A_2 і навпаки, або залишає їх нерухомими. *А* це лише прямі *OX* і *OY*.

При побудові гіперболи досить побудувати її у першій координатній четверті, а в інших – по симетрії.

З рівняння гіперболи маємо: $y^2=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)$, або $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$.

Графік цієї функції необмежений і при $x\to\infty$, наближається у першій четверті до прямої $y=\frac{b}{a}x$, яку називають **асимптотою гіперболи**.

Таким чином, гіперболу можна побудувати за допомогою прямокутника із сторонами *2a* і *2b*, його діагоналі будуть асимптотами (рис.12).

Основні елементи гіперболи, які не залежать від орієнтації системи координат:

1. a – **дійсна піввісь**; $2a$ – дійсна вісь.
2. b – **уявна піввісь**; $2b$ – уявна вісь.
3. $2c$ **– фокальна відстань** ($c^2=a^2+b^2$).
4. $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$ – **ексцентриситет**.
5. Точки $A_1(a,0)$ та $A_2(-a,0)$– **вершини** гіперболи.
6. Точка $O(0,0)$ – **центр** гіперболи.
7. Точки $F_1(c,0)$ і $F_2(-c,0)$ – **фокуси** гіперболи.
8. Прямі d_1 і d_2 $: x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ – **директриси** гіперболи.

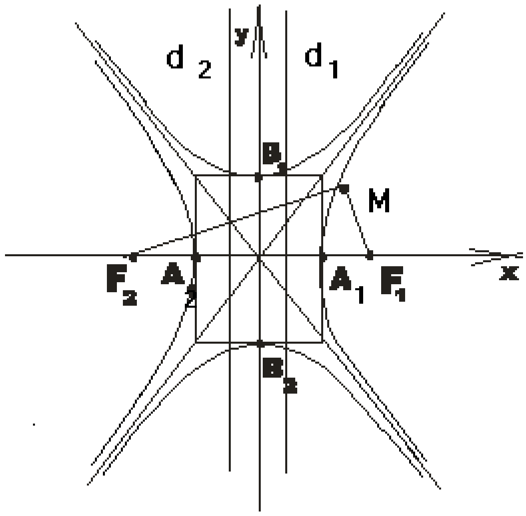

Рис.12

9. Прямі $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ – **асимптоти** гіперболи

Відрізки, які сполучають довільну точку гіперболи з фокусами, називаються **фокальними радіусами**. Як і для еліпса знайдемо: $|MF_1| = |\varepsilon x - a|$, $|MF_2| = |\varepsilon x + a|$ Але так як для гіперболи $|\varepsilon x| > |x| > a$ то $|MF_1| = \begin{cases} -a + \varepsilon x, & x > 0, \\ +a - \varepsilon x, & x < 0 \end{cases}$, і

$$|MF_2| = \begin{cases} +a + \varepsilon x, & x > 0, \\ -a - \varepsilon x, & x < 0. \end{cases}$$ Звідси випливає, що

$$|MF_1| - |MF_2| = \begin{cases} -2a, & x > 0, \\ +2a, & x < 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad ||MF_1| - |MF_2|| = 2a .$$

Одержали геометричне означення гіперболи: **гіперболою** називається множина всіх точок площини, модуль різниці відстаней від яких, до двох даних точок F_1 і F_2 (фокусів) є величина постійна (рівна $2a$).

Відмітимо, що у випадку $a=b$ гіпербола називається **рівносторонньою**.

Теорема 9.

Якщо за вісі прямокутної системи координат взяти асимптоти рівносторонньої гіперболи, то в цій системі координат гіпербола являє собою графік оберненої пропорційності $y=\dfrac{k}{x}$.

Доведення.

Розглянемо рівносторонню гіперболу задану рівнянням

$x^2-y^2=a^2$ в прямокутній системі координат $(O,\bar{i},\bar{j})$. Перейдемо до системи $(O,\bar{i}\,',\bar{j}\,')$, де $(O,\bar{i}\,',\bar{j}\,')$одержана з $(O,\bar{i},\bar{j})$ поворотом на кут $-\dfrac{\pi}{4}$. Формули повороту прямокутних систем координат мають вигляд: $\begin{cases} x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi \\ y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi \end{cases}$. Оскільки кут φ рівний $-\dfrac{\pi}{4}$, то отримаємо $\begin{cases} x=x'\dfrac{\sqrt{2}}{2}-y'\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ y=x'\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+y'\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$, або $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(y'-x') \end{cases}$.

Підставивши у рівняння гіперболи $x^2-y^2=a^2$, отримаємо:

$\left(x'\dfrac{\sqrt{2}}{2}+y'\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(y'\dfrac{\sqrt{2}}{2}-x'\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=a^2$, або

$\dfrac{1}{2}x'^2+x'y'+\dfrac{1}{2}y'^2-\dfrac{1}{2}y'^2+x'y'-\dfrac{1}{2}x'^2=a^2$ і $2x'y'=a^2$.

Звідки: $y'=\dfrac{a^2}{2x'}$ і позначивши $k=\dfrac{a^2}{2}$ отримаємо: $y=\dfrac{k}{x}$

Теорему доведено.

Якщо $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, то ми отримаємо гіперболу, яка називається **спряженою** з $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Вона має ті ж асимптоти, але її фокуси лежать на вісі OY (див. рис.12).

§ 19. Парабола.

Параболою називається множина всіх точок площини, координати яких, в деякій прямокутній системі координат задовольняють рівняння: $y^2=2px$ **(16)**

Так як у рівнянні параболи в парній степені лише ордината, то парабола симетрична тільки відносно вісі OX і розміщена в першій і четвертій чвертях, якщо $p>0$ (рис.13) і другій та третій, якщо $p<0$. Вісь симетрії параболи називається **віссю параболи**.

Парабола проходить через точку $O(0,0)$, яка називається **вершиною параболи**. Інших точок перетину з осями координат парабола не має, тому вісь OX – єдина вісь симетрії параболи.

Нехай $p>0$, тоді якщо $x\to\infty$ то і $y\to\infty$ (рис.13).

Відмітимо основні елементи параболи, які не залежать від орієнтації системи координат:

1. число p – **фокальний параметр**.
2. число $\frac{p}{2}$ – **фокальна відстань**.
3. точка $F(\frac{p}{2},0)$ – **фокус**.
4. пряма d: $x=-\frac{p}{2}$ – **директриса**.

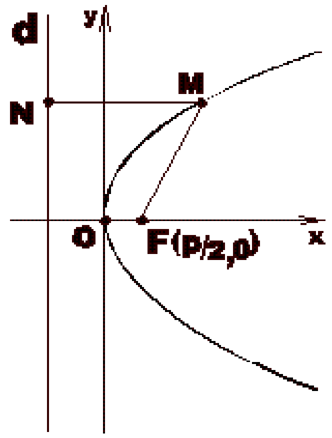

Рис.13

Теорема 10.

Парабола – це множина тих і тільки тих точок площини, які рівновіддалені від фокуса і директриси.

Доведення.

Нехай точка *M(x,y)* рівновіддалена від *F* і *d*. Умова рівновіддаленості: $|FM| = \rho(M,d)$. $\rho(M,d) = |x + \frac{p}{2}|$.

$|FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$ отже, $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$, або

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Звідки $y^2 = 2px$. Отже, якщо точка рівновіддалена від фокуса і директриси, то вона належить параболі (рис.13).

Навпаки, нехай точка *M* належить параболі, яка має рівняння $y^2 = 2px$.

Знайдемо відстань від точки *M* до фокуса:

$|FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$. Оскільки точка *M* належить параболі, то її координати задовольняють рівняння параболи отже, $y^2 = 2px$, тому $|FM| = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$, а це і є відстань від точки *M* до директриси.

Приклад 6.

У прямокутній системі координат дана точка *A(1,0)* та пряма *x = 2*. Скласти рівняння лінії, кожна точка *M(x,y)* якої рівновіддалена від точки *A* та прямої *x = 2*.

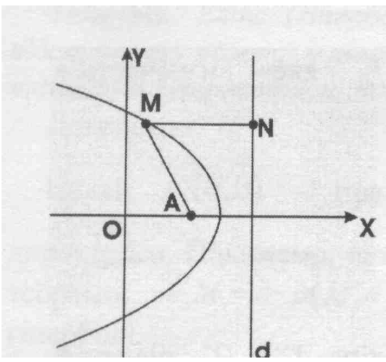

Рис. 14

Розв'язання: За умовою задачі $MA = MN$ (рис.14).

Звідси,

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2},$$

$$x^2-2x+1+y^2=x^2-4x+4, \qquad y^2=-2x+3, \qquad y^2=-2(x-\frac{3}{2})..$$

Отримали рівняння параболи. Точка *A* співпадає з її фокусом, пряма $x = 2$ її директриса (рис. 14).

§ 20. Афінна еквівалентність еліпсів (гіпербол). Подібність парабол

Фігури F і F' називаються **афінно-еквівалентними**, якщо існує таке афінне перетворення, яке фігуру F відображає в F'

Теорема 11.

Будь-які два еліпса Υ_1 і Υ_2 афінно-еквівалентні і якщо їх ексцентриситети рівні, то вони подібні.

Доведення.

Нехай в ортонормованих реперах R і $\widetilde{R}$ еліпси Υ_1 і Υ_2 мають відповідно рівняння: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ і $\dfrac{\widetilde{x}^2}{\widetilde{a}^2}+\dfrac{\widetilde{y}^2}{\widetilde{b}^2}=1$.

Згідно теореми 2 , існує рух f_1, який переводить репер $\widetilde{R}$ в R' і при цьому еліпс Υ_2 перейде в рівний йому еліпс Υ_3, рівняння якого в репері R' буде: $\dfrac{x'^2}{\widetilde{a}^2}+\dfrac{y'^2}{\widetilde{b}^2}=1$.

Розглянемо афінне перетворення f_2, яке визначається формулами:

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\widetilde{a}}x', \\ y=\dfrac{b}{\widetilde{b}}y'. \end{cases} \qquad \text{Звідки} \quad \begin{cases} x'=\dfrac{\widetilde{a}}{a}x, \\ y'=\dfrac{\widetilde{b}}{b}y. \end{cases} \qquad (*)$$

Афінне перетворення f_2 відобразить еліпс Υ_3 в Υ_1, рівняння якого в репері R матиме вигляд: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Маємо: $f=f_2\circ f_1$ –

композиція руху і афінного перетворення – афінне перетворення, яке й переводить еліпс Υ_2 в Υ_1 отже, вони афінно-еквівалентні.

Якщо ж їх ексцентриситети рівні: $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, або $\frac{c}{a}=\frac{\widetilde{c}}{\widetilde{a}}$, то $a=k\widetilde{a}, c=k\widetilde{c}$. Тоді $b^2=a^2-c^2=k^2\left(\widetilde{a}^2-\widetilde{c}^2\right)=k^2\widetilde{b}^2$ отже, і $b=k\widetilde{b}$. В цьому випадку формули (*) мають вигляд: $\begin{cases} x'=kx \\ y'=ky \end{cases}$, тобто задають гомотетію з центром в точці O коефіцієнта k. Маємо $f=f_2\circ f_1$ – композиція руху і гомотетії – перетворення подібності, отже, еліпс Υ_1 подібний Υ_2, так як $f(\Upsilon_2)=\Upsilon_1$.

Аналогічно, як і для еліпса доводяться теореми:

Теорема 12.

Будь-які дві гіперболи афінно-еквівалентні. Якщо ексцентриситети їх рівні, то вони подібні.

Теорема 13.

Будь-які дві параболи подібні.

§ 21. Рівняння еліпса, гіперболи і параболи в полярній системі координат

Теорема. *Еліпс (гіпербола) є множина всіх точок площини, відстань від кожної з яких до фокуса рівна відстані від неї ж до відповідної директриси, помноженій на ексцентриситет.*

Доведення.

Нехай $F_1(c,0)$ – правий фокус, d_1 : $x-\frac{a}{\varepsilon}=0$ – права директриса. Покажемо, що якщо точка $M(x,y)$ задовольняє умову теореми: $F_1M=\varepsilon\cdot\rho(M,d)$, то вона належить еліпсу, або гіперболі.

$$|F_1M| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}, \quad \rho(M,d_1)=\left|x-\frac{a}{\varepsilon}\right|.$$

$$(x-c)^2+y^2=\varepsilon^2x^2+a^2-2\varepsilon ax.$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}x^2+a^2-2\frac{ca}{a}x.$$

$$x^2(1-\frac{c^2}{a^2})+y^2=a^2-c^2.$$

Так як для еліпса $a^2-c^2=b^2$, а для гіперболи $a^2-c^2=-b^2$, отримаємо $\left[\begin{array}{l} x^2\dfrac{b^2}{a^2}+y^2=b^2, \\ x^2\left(-\dfrac{b^2}{a^2}+y^2\right)=-b^2. \end{array}\right.$

Розділивши на $b^2(-b^2)$одержимо: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1. \end{array}\right.$

Навпаки, якщо точка M належить гіперболі або еліпсу, то її фокальний радіус $|\ F_1M\ |=|\varepsilon x-a|$. Знайдемо відстань від точки M до директриси d_1: $\rho(M,d_1)=\left|x-\frac{a}{\varepsilon}\right|=\left|\frac{\varepsilon x-a}{\varepsilon}\right|$. Отже,

$$|F_1M|=\varepsilon\cdot\rho(M,d_1). \qquad (*)$$

Ми відкрили геометричний зміст ексцентриситету еліпса і гіперболи. Ексцентриситет їх, це постійне число, яке дорівнює відношенню відстаней від кожної точки кривої до фокуса, до відстані від цієї ж точки до відповідної директриси. З геометричного означення параболи бачимо що і її точки мають аналогічну властивість. Це відношення для неї рівне 1. Отже, для будь-якої параболи $\varepsilon=1$.

Нехай тепер γ – еліпс відмінний від кола, одна вітка гіперболи, або парабола. F і d – фокус і відповідна директриса кривої γ. Тоді пряма d розіб’є площину на дві півплощини, причому крива γ повністю належатиме одній півплощині λ обмеженій прямою d.

Згідно теореми, крива γ це множина всіх точок M півплощини λ, таких, що $|FM| = \varepsilon \cdot \rho(M,d)$. Отримаємо рівняння кривої γ в полярній системі координат $\left(F,\vec{i}\right)$ (рис.15), де $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{DF}}{\left|\overrightarrow{DF}\right|}$, ($D$ – проекція точки F на пряму d).

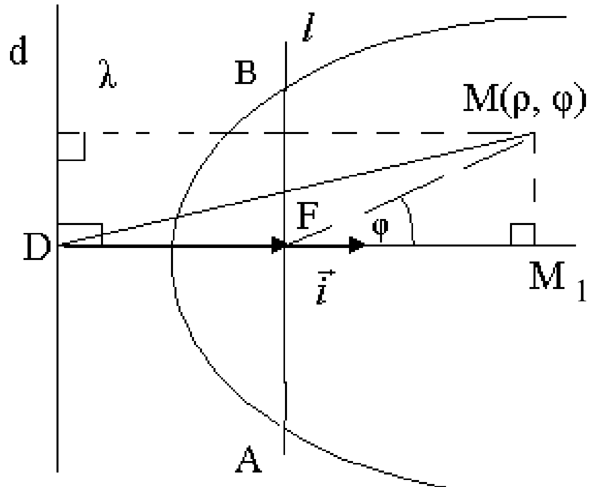

Рис. 15

Розглянемо будь-яку точку $M \subset \lambda$. В полярній системі координат вона буде мати координати: $M(\rho,\varphi)$ (рис.15). Нехай M_1 - її проекція на полярну вісь. Обчислимо $\rho(M,d) = |DM_1| = |DF| + |FM_1| = |DF| + \rho\cos\varphi.$ Нехай тепер точка $M \in \gamma$, тоді підставимо це значення відстані в (*) отримаємо: $|FM| = \varepsilon \cdot \rho(M,d)$, $\rho = \varepsilon\left(|DF| + \rho\cos\varphi\right)$, або $\rho - \rho\varepsilon\cos\varphi = \varepsilon|DF|$ Звідки $\rho\left(1 - \varepsilon\cos\varphi\right) = p$, де $p = \varepsilon|DF|$.

Остаточно отримаємо рівняння кривої в полярній системі координат:
$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \qquad \textbf{(17)}$$

Якщо $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$, маємо $\rho = p$, отже, p–полярний радіус точок A і B – перетину кривої γ з прямою ℓ, яка проходить через фокус паралельною до директриси.

Число p називається **фокальним параметром** (для параболи ми вже його розглядали). Вияснимо, для яких значень кута φ рівняння (17) визначає всі точки кривої γ .

Якщо $\varepsilon < 1$, то γ - еліпс і $1-\varepsilon\cos\varphi > 0$, і якщо $\varphi \in [0,2\pi)$, то рівняння (17) задає еліпс.

Якщо $\varepsilon > 1$, то γ -гіпербола і рівняння (17) має зміст лише якщо $1-\varepsilon\cos\varphi > 0$, або $\cos\varphi < \frac{1}{\varepsilon}$. Якщо φ_0– кут, такий що $\cos\varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon}$,, то маємо $\cos\varphi_0 > \cos\varphi$, $\Rightarrow$ $\varphi_0 < \varphi < 2\pi - \varphi_0$,отже, якщо $\varphi \in (\varphi_0, 2\pi - \varphi_0)$,то отримаємо вітку гіперболи. Тут φ_0– кут, який утворює асимптота з полярною віссю. Якщо ж полярна система координат узагальнена, то $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$- маємо другу вітку гіперболи.

Якщо $\varepsilon = 1$, то $\varphi \in (0,2\pi)$ і крива γ - парабола.

§ 22. Дотичні до кривих другого порядку

Розглянемо еліпс $\gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ і пряму l задану параметричними рівняннями: $\begin{cases} x = \alpha t + x_0, \\ y = \beta t + y_0, \end{cases}$.

Для знаходження точок перетину прямої з еліпсом потрібно розв’язати систему трьох даних рівнянь (фактично підставити рівняння прямої у рівняння еліпса). Отримаємо:

$$\frac{(\alpha t + x_0)^2}{a^2} + \frac{(\beta t + y_0)^2}{b^2} = 1 \text{ або}$$

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2+2\left(\frac{\alpha x_0}{a^2}+\frac{\beta y_0}{b^2}\right)t+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

Якщо отримане квадратне рівняння має два дійсних кореня $t_1 \neq t_2$, то отримаємо дві точки перетину прямої і еліпса.

Якщо розв'язки рівняння збігаються $(t_1 = t_2)$, то пряма l буде мати з еліпсом одну спільну точку, тобто буде дотичною до еліпса в точці з параметром t_1. Підставивши це значення параметра в рівняння прямої l, отримаємо координати x_0, y_0 точки дотику. Оскільки ця точка належить еліпсу, то її координати задовольняють рівняння еліпса: $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$.

Отримаємо $\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2+2\left(\frac{\alpha x_0}{a^2}+\frac{\beta y_0}{b^2}\right)t=0$

Так як корені рівняння $t_1 = t_2$ і $t_1 = 0$, то і $t_2 = 0$. Це можливо лише тоді, коли $\frac{\alpha x_0}{a^2}+\frac{\beta y_0}{b^2}=0$. Знайшовши з рівнянь прямої $\alpha = \frac{x - x_0}{t}$, $\beta = \frac{y - y_0}{t}$ і підставивши в останню рівність, отримаємо рівняння $\frac{x_0(x-x_0)}{a^2}+\frac{y_0(y-y_0)}{b^2}=0$.

Враховуючи, що $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$ будемо мати рівняння дотичної до еліпса: $\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1$ **(18)**

Аналогічно міркують, отримаємо рівняння дотичних в точці з координатами x_0, y_0 до гіперболи $\frac{x_0 x}{a^2}-\frac{y_0 y}{b^2}=1$ **(19)**

та параболи: $y_0 y = p(x + x_0)$. **(20)**

Приклад 7.

Скласти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$, перпендикулярних до прямої $2x-2y-7=0$.

Розв'язання: Позначимо точку дотику $M_0(x_0, y_0)$. Нормальний вектор даної прямої буде направляючим для дотичної отже, $\vec{p}=(2,-2)$, або $\vec{p}_1=(1,-1)$.

Так як точка M_0 належить еліпсу, то $\frac{x_0^2}{20}+\frac{y_0^2}{5}=1$, крім того для дотичної $\frac{\alpha x_0}{a^2}+\frac{\beta y_0}{b^2}=0$.

У нашому випадку маємо $\frac{x_0}{20}-\frac{y_0}{5}=0$. Розв'язавши систему

$\begin{cases} \frac{x_0^2}{20}+\frac{y_0^2}{5}=1 \\ \frac{x_0}{20}-\frac{y_0}{5}=0 \end{cases}$, отримаємо два розв'язки: $x_0=4$, $y_0=1$ і $x_0=-4$, $y_0=1$. Записавши рівняння прямих, які проходять через ці точки, паралельно вектору $\overrightarrow{p_1}$, отримаємо рівняння дотичних: $x+y-5=0$ і $x+y+5=0$.

§ 23. Оптичні властивості еліпса, гіперболи та параболи

Якщо джерело світла розмістити в одному із фокусів еліпса, то після відбиття від еліпса всі промені пройдуть через інший фокус.

Якщо розмістити джерело світла у фокусі гіперболи, то після дзеркального відбиття від неї промені будуть мати такий напрямок, ніби вони виходять з іншого фокуса.

Якщо ж джерело світла розмістити у фокусі параболи, то після дзеркального відбиття від неї всі промені будуть паралельними до її вісі. На цій властивості параболи ґрунтується будова прожекторів, телескопів і ін.

Доведемо це. Покажемо, що дотична до параболи $y_0 y = p(x + x_0)$ в точці $P_0(x_0, y_0)$ утворює рівні кути з фокальним радіусом FP_0 і прямою $F'P_0$, де F' проекція точки P_0 на директрису (рис. 16)

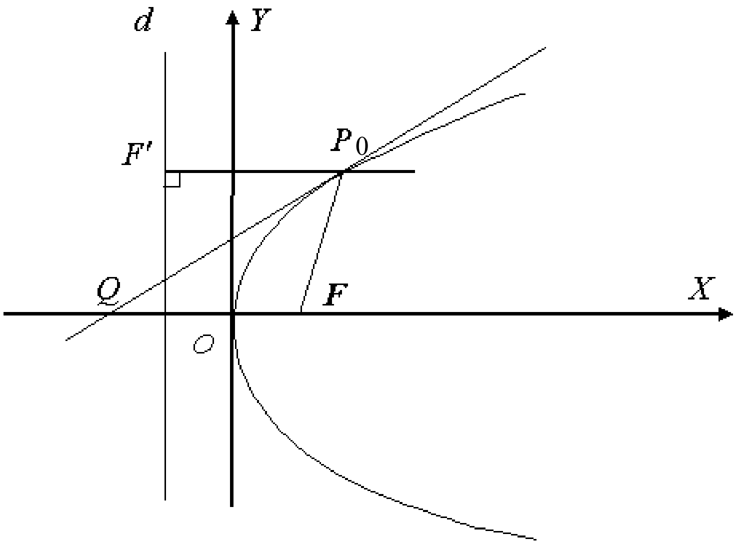

Рис.16

Знайдемо координати точки Q – перетину дотичної з віссю OX:

$P(x + x_0) = 0$, або

$x = -x_0$.

Отже, $Q(-x_0, 0)$. Покажемо, що трикутник FP_0Q рівнобедрений.

Дійсно $|FQ| = x_0 + \dfrac{p}{2}$ і $|FP_0| = x_0 + \dfrac{p}{2}$ отже, і кути $\angle P_0QF = \angle QP_0 F$. Але $\angle P_0QF = \angle QP_0 F'$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих, тому і $\angle QP_0F = \angle QP_0F'$, що і потрібно було довести.

Приклад 8.

Із фокуса параболи $y^2 = 12x$ під кутом 45^0 до осі OX виходить промінь світла. Знайти рівняння прямої, якій буде належати промінь після дзеркального відбиття від параболи.

Розв'язання: Очевидно, що фокус параболи: $F(3,0)$. Знайдемо рівняння прямої, якій належить промінь світла, що виходить з фокуса. Скористаємося рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом: $y-0=k(x-3)$. Оскільки $k=tg45^0=1$, то $y=x-3$.

Знайдемо точку параболи, в якій промінь відбивається. Для цього розв'яжемо систему $\begin{cases} y^2=4x \\ y=x-3 \end{cases}$. Знайшовши з першого рівняння $x=\dfrac{y^2}{4}$ і підставивши в друге отримаємо:

$y=\dfrac{y^2}{4}-3$ або $y^2-4y-12=0$.

Звідки $y_1=6$ і $y_2=-2$. За умовою задачі нам потрібен додатній корінь точка перетину променя (а не всієї прямої) з параболою, тому рівняння шуканої прямої $y=6$.

Розглянемо ще один приклад на зведення загального рівняння кривої 2-го порядку до канонічного вигляду в евклідовому просторі та її побудову.

Приклад 9.

Привести до канонічного вигляду рівняння кривої

$5x_1^2+8x_1x_2+5x_2^2-18x_1-18x_2+9=0$

простору E_2 за допомогою переходу до нової прямокутної системи координат. Вказати вид кривої. Побудувати її.

Розв'язання: Спочатку за допомогою ортогонального перетворення приведемо до канонічного вигляду квадратичну форму даної кривої: $5x_1^2+8x_1x_2+5x_2^2$ (див. **§ 13).**

Для цього запишемо її матрицю: $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$,

складемо характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0$

і знайдемо корені цього рівняння: $\lambda_1=9$, $\lambda_2=1$.

Отже, дана квадратична форма має канонічний вигляд

$$9y_1^2 + y_2^2.$$

Знайдемо базисні вектори $\vec{i'}$ і $\vec{j'}$ нової прямокутної системи координат. Вони є власними векторами лінійного оператора, що має ту ж матрицю, що і дана квадратична форма; отже, їх координати задовольняють системі рівнянь:

$$\begin{cases} (5-\lambda)u_1 + 4u_2 = 0, \\ 4u_1 + (5-\lambda)u_2 = 0. \end{cases}$$

При $\lambda = 9$ одержимо систему, еквівалентну рівнянню $u_1 - u_2 = 0$. Один з розв'язків цього рівняння $u_1 = u_2 = 1$. Вектор $\vec{p} = (1;1)$ – власний вектор, який відповідає значенню $\lambda_1 = 9$.

Нормуючи цей вектор, отримаємо:

$$\vec{i'} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Аналогічно знайдемо $\vec{q} = (-1;1)$ – власний вектор, який відповідає значенню $\lambda_2 = 1$, і вектор $\vec{j'} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

Знаючи вектори $\vec{i'}$ і $\vec{j'}$, запишемо формули ортогонального перетворення, яке приводить дану квадратичну форму до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2, \end{cases} \qquad (a)$$

Як бачимо, це формули перетворення координат при переході до прямокутної системи координат, одержаної із старої системи за допомогою обертання навколо початку координат на кут φ=45°. Щодо цієї нової системи крива матиме рівняння:

$$9y_1^2+y_2^2-18\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)-18\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)+9=0$$

або $9y_1^2+y_2^2-18\sqrt{2y_1}+9=0.$

Запишемо це рівняння у вигляді:

$$9\left(y_1^2-2\sqrt{2}y_1+2\right)-18+y_2^2+9=0,$$

$$9\left(y_1-\sqrt{2}\right)^2+y_2^2=9,$$

$$\left(y_1-\sqrt{2}\right)^2+\frac{y_2^2}{9}=1.$$

Якщо одержану вище систему координат піддати паралельному перенесенню, поклавши

$$\begin{cases} y_1=z_1+\sqrt{2}, \\ y_2=z_2 \end{cases} \qquad (b),$$

то рівняння кривої прийме канонічний вигляд:

$$z_1^2+\frac{z_2^2}{9}=1.$$

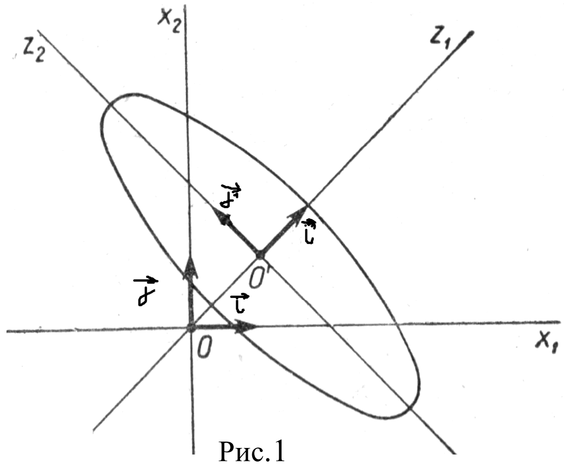

Рис.1

Отже, дана крива – еліпс.

Підставляючи (*b*) в (*a*), одержимо формули:

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}z_1-\frac{1}{\sqrt{2}}z_2+1, \\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}z_1+\frac{1}{\sqrt{2}}z_2+1 \end{cases}$$

переходу від початкової системи координат до тієї, в якій крива має канонічне рівняння.

Щодо даної системи координат новий початок і нові базисні вектори мають координати:

$$O'(1;1),\quad \vec{i}'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{j}'=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Побудувавши їх, отримаємо нову систему координат $O'z_1z_2$

розташування якої відносно даної прямокутної системи координат Ox_1x_2 та зображення еліпса показано на рисунку 17.

ЗАДАЧІ

1. Знайти довжини півосей та координати фокусів наступних еліпсів:

а) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$;

б) $4x^2 + 144y^2 - 576 = 0$.

2. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо:

а) вершини еліпса мають координати $A_1(6,0)$, $A_2(-6,0)$, $B_1(0,3)$, $B_2(0,-3)$;

б) фокальна відстань $2c = 10$, а мала піввісь $b = 5$;

в) ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, велика піввісь $a = 3$;

г) ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$, а мала піввісь $b = 2$;

д) відстань між фокусами дорівнює 8, а ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

3. Довжина великої піввісі еліпса дорівнює 6, ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, а відстань від точки M еліпса до фокуса F_1 дорівнює 7. Знайти відстань від точки M до фокуса F_2 та координати точки M. Написати канонічне рівняння еліпса.

4. Скласти рівняння еліпса в канонічній системі координат, якщо:

а) еліпс проходить через точки $M_1\left(2, \dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$ та $M_2(-3, 0)$;

б) еліпс проходить через точки $M_1(1,3)$, $M_2(4,1)$;

в) еліпс проходить через точку $M\left(-2, \frac{11}{\sqrt{15}}\right)$ та має ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{15}}$.

5. Написати рівняння директрис еліпса $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$ та знайти відстань між ними.

6. Скласти рівняння еліпса, якщо:

а) відстань між директрисами дорівнює 12, а велика піввісь дорівнює $2\sqrt{3}$;

б) відстань між директрисами дорівнює $\frac{72}{\sqrt{11}}$, а між фокусами $2\sqrt{11}$;

в) відстань між директрисами дорівнює $4\sqrt{15}$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) прямі $x = \pm\frac{8}{\sqrt{3}}$ є директрисами еліпса, а мала піввісь дорівнює 2.

7. Знайти рівняння множини точок, для кожної з яких сума відстаней до двох точок $F_1(4,0)$ та $F_2(-4,0)$ дорівнює 10.

8. Через фокус F_1 проведена хорда еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, паралельна канонічній вісі OY. Визначити довжину цієї хорди.

9. Хорда, що проведена через фокус F_1 паралельно вісі OY, перетинає еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точках M_1 та M_2. Визначити відстань від точок M_1 та M_2 до фокуса F_2.

10. Визначити ексцентриситет еліпса, якщо його малу вісь видно з фокусів під кутом 60°.

11. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо відрізок між його фокусами видно з вершини малої осі під прямим кутом.

12. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо відрізок перпендикуляра, опущеного з центра еліпса на директрису, ділиться вершиною еліпса навпіл.

13. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо відстань між його директрисами втричі більша за відстань між фокусами.

14. Задавши на площині прямокутну систему координат, зобразити області, що визначаються наступними системами нерівностей:

а) $\begin{cases} 9x^2+25y^2-225<0, \\ 3x+5y-15<0, \\ y+2>0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+4y^2-16>0, \\ y+3>0, \\ x+y-2<0. \end{cases}$

15. Дано еліпс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. Знайти фокальні радіуси точок $M_1(3, \sqrt{15})$ та $M_2(-2, \frac{4}{3}\sqrt{10})$, що належать даному еліпсу.

16. Визначити площу чотирикутника дві вершини якого знаходяться в фокусах еліпса $5x^2+9y^2=1$, а дві інші співпадають з кінцями малої осі.

17. Знайти довжини півосей та координати фокусів наступних гіпербол:

а) $9x^2-4y^2-36=0$; б) $x^2-y^2-5=0$.

18. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо:

а) відстань між вершинами рівна 8, а відстань між фокусами – 10;

б) дійсна піввісь дорівнює 3 і гіпербола проходить через точку $(6, 2\sqrt{3})$;

в) відстань між директрисами рівна $\frac{8}{3}$ а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{2}$.

г). відстань між директрисами рівна $22\frac{2}{13}$, а відстань між фокусами = 26

19. Визначити піввісі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння асимптот та рівняння директрис наступних гіпербол:

а) $4x^2 - 9y^2 = 36;$ б) $16x^2 - 9y^2 = 144.$

20. Знайти площу S прямокутника, вершини якого лежать на гіперболі $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, а дві сторони проходять через фокуси паралельно до вісі OY. Обчислити S для випадку, коли $a^2 = 20$ та $b^2 = 10$.

21. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо:

а) гіпербола проходить через точки (4, 0) та ($4\sqrt{17}$, 4);

б) гіпербола проходить через точку (–5, 3) та має ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$;

в) гіпербола має асимптоти $4y \pm x = 0$ та директриси $5x \pm 16=0;$

г) гіпербола є рівнобічною та проходить через точку ($\sqrt{2}$, 1).

22. Написати рівняння гіперболи, якщо її асимптоти мають рівняння : $3y \pm 4x = 0$ а відстань між фокусами рівна 20

23. Переконавшись, що точка М$(-5, \frac{9}{4})$ належить гіперболі $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, знайти її фокальні радіуси.

24. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо кут між асимптотами дорівнює 60^0 і гіпербола проходить через точку $M\ (6,3)$.

25. Скласти рівняння гіперболи, що має загальні фокуси із еліпсом $\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{10} = 1$ та проходить через точку $M(4\sqrt{2},\ 3)$.

26. Дана гіпербола $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{12}=1$. Написати рівняння спряженої з нею гіперболи; знайти ексцентриситети, директриси та асимптоти даної та спряженої гіперболи.

27. Знаючи ексцентриситет, визначити кут між асимптотами гіперболи: а) $\varepsilon=\sqrt{2}$; б) $\varepsilon=2$.

28. Знайти площу трикутника, утвореного асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$ і прямої перпендикулярної до дійсної вісі і проведеної через фокус.

29. Написати рівняння траєкторії руху точки $M(x,y)$, якщо в будь-який момент часу вона знаходиться в 1,25 раз далі від точки $A(5,0)$, ніж від прямої $5x-16=0$.

30. Задавши на площині прямокутну систему координат, побудувати області, що визначаються наступними системами нерівностей:

а) $\begin{cases} x^2-4y^2-4>0, \\ 4x+3y-12<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9x^2-16y^2+144>0, \\ 2x-y-6<0, \\ 3x+y+12>0. \end{cases}$

31. Визначити координати фокуса та скласти рівняння директриси для кожної із наступних парабол:

а) $y^2=6x$; б) $x^2=-4y$; в) $y^2=-2x$;

г) $x^2=3y$; д) $2x^2-3y=0$; е) $3y^2+16x=0$.

32. Скласти канонічне рівняння параболи в кожному із наступних випадків:

а) відстань від фокуса, що лежить на осі OX, до вершини дорівнює 4;

б) парабола симетрична відносно осі абсцис та проходить через точку $M(1,2)$;

в) парабола симетрична відносно осі ординат та проходить через точку $M(5,1)$.

33. Скласти канонічне рівняння параболи в кожному з наступних випадків:

а) фокус має координати *(3,0)*;

б) фокус має координати *(0,5);*

в) директриса має рівняння $x + 15 = 0$;

г) директриса має рівняння $y + 12 = 0$.

34. Обчислити фокальний радіус *FM* точки *M* параболи $y^2 = 8x$, якщо її абсциса дорівнює *8*.

35. Знайти фокальний радіус точки *M* параболи $y^2 = 12x$, якщо ордината точки *M* рівна 6.

36. На параболі $y^2 = 16x$ знайти точку, фокальний радіус якої рівний *13*.

37. На параболі $x^2 = -12y$ знайти точку, фокальний радіус якої рівний *9*.

38. Визначити площу трикутника, у якого одна вершина належить директрисі параболи $y^2=2px$, а дві інші є кінцями хорди, яка проходить через фокус перпендикулярно до осі *OX*.

39. Скласти рівняння траєкторії руху точки *M (x,y)*, якщо в будь-який момент часу вона є рівновіддаленою від точки *A(8, 4)* та вісі ординат.

40. Обчислити довжини півосей та відстань між фокусами еліпса, заданого в полярній системі координат рівнянням

а). $p = \dfrac{3\sqrt{2}}{2 - \cos\varphi}$; б). $p = \dfrac{3}{4 - \sqrt{13}\cos\varphi}$.

41. Дано еліпси:

а) $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{10} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{10} = 1$

Написати рівняння цих еліпсів у полярній системі координат, полюс якої знаходиться в одному з фокусів еліпса, а полярна вісь направлена у сторону іншого фокуса.

42. В кожному із наступних випадків скласти канонічне рівняння параболи, що задана у полярній системі координат:

а) $p = \dfrac{8}{2 - 2\cos\varphi}$; б) $p = \dfrac{7}{1 - \cos\varphi}$.

43. Написати рівняння парабол: а) $y^2 = 2x$; б) $y^2 = 10x$ у полярній системі координат, якщо полюс співпадає із фокусом параболи, а полярна вісь – із віссю *OX*.

44. Побудувати криві:

а) $\rho = \dfrac{5}{1 - \frac{1}{2}\cos\varphi}$; б) $\rho = \dfrac{6}{1 - \cos\varphi}$; в) $\rho = \dfrac{10}{1 - \frac{3}{2}\cos\varphi}$;

г) $\rho = \dfrac{25}{13 - 12\cos\varphi}$; д) $\rho = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$.

45. Побудувати криві:

1) $x^2 + 2x + y^2 - 3 = 0$; 2) $x^2 - x + y^2 - \frac{3}{4} = 0$;

3) $x^2 - y^2 - 4 = 0$; 4) $x^2 - y^2 - x - y - \frac{1}{2} = 0$;

5) $x^2 + 2x - y^2 - 8 = 0$; 6) $y^2 + 2y - x + 1 = 0$;

7) $x^2 - 4y + 4 = 0$; 8) $x^2 - 6y^2 - 12x + 36y - 48 = 0$.

46. Знайти центр, піввісі, ексцентриситет і рівняння директрис еліпса: $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$.

47. Знайти центр, піввісі, ексцентриситет, рівняння директрис і асимптот гіперболи:

а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y = 0$;

б) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$.

48. Знайти координати вершини і рівняння директриси параболи:

а) $y^2 = 4x - 8$; б) $y^2 = 4 - 6x$; в) $x^2 = 2 - y$; г) $y = 4x^2 - 8x + 7$.

За допомогою повороту прямокутної системи координат привести до канонічного вигляду наступні рівняння кривих другого порядку. Написати формули перетворення і зобразити дані криві:

49 $5x^2+8yx+5y^2-9=0$.

50. $9x^2-6xy+y^2-\sqrt{10}x-3\sqrt{10}y=0$.

51. $4x^2-4xy+y^2-15=0$.

52. $x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-2\sqrt{3}x+2y=0$.

53. $2x^2+12xy-7y^2+20=0$.

54. $x^2+2xy+y^2=0$.

За допомогою повороту прямокутної системи координат і переносу початку привести до канонічного вигляду наступні рівняння кривих. Написати формули перетворення координат і побудувати дані криві:

55. $xy+2x+y+\dfrac{5}{2}=0$.

56. $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$.

57. $\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}y^2+2xy-2x-2\sqrt{3}y=0$.

58. $9x^2+6y^2+4xy+2x-4y-4=0$.

59. $9x^2+4y^2-12xy+39=0$.

Розділ 4

Поверхні другого порядку

§ 24. Поверхні обертання

Поверхня, яка разом з будь-якою своєю точкою містить все коло, отримане обертанням цієї точки навколо деякої фіксованої прямої, називається **поверхнею обертання** (рис. 18).

Пряма, навколо якої виконується обертання, називається **віссю обертання**. Якщо поверхню обертання перетинати площинами, перпендикулярними до вісі обертання, то отримаємо кола. Такі кола називаються **паралелями поверхні**. Площини, які проходять через вісь обертання, перетинають поверхню обертання по лініях, які називаються **меридіанами.**

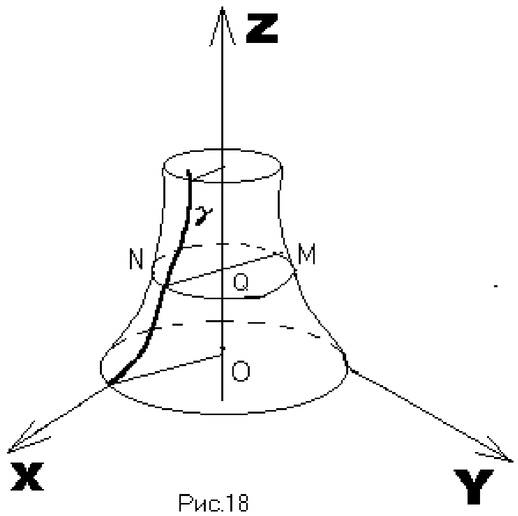

Рис.18

Нехай в прямокутній системі координат $(O,\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ задана лінія γ, яка лежить в площині XOZ. Тоді вона має рівняння $\begin{cases} x = f(z) \\ y = 0 \end{cases}$. Знайдемо рівняння поверхні, яка утвориться при обертанні лінії γ навколо осі OZ. Візьмемо на поверхні довільну точку $M(x,y,z)$ і проведемо через неї площину, перпендикулярну до осі OZ. В перетині з поверхнею обертання отримаємо коло з центром в точці $Q(o,o,z)$, радіуса $QM=\sqrt{x^2+y^2}$. З іншого боку, цей радіус є абсцисою точки $N(x_1,z_1)$ лінії γ, апліката якої $z_1=z$. Підставивши в рівняння лінії γ $z_1=z$, $x_1=\sqrt{x^2+y^2}$, отримаємо **рівняння поверхні обертання навколо осі** OZ: $f(z)=\sqrt{x^2+y^2}$, або

$$f^2(z)=x^2+y^2 \tag{21}$$

Отже, щоб отримати рівняння поверхні обертання, утвореної обертанням лінії γ, що лежить в площині XOZ, навколо осі OZ, потрібно в рівнянні цієї лінії замінити *x* на $\sqrt{x^2+y^2}$.

Аналогічно можна отримати поверхні обертання навколо інших координатних осей.

§ 25. Еліпсоїд

Еліпсоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{22}$$

Величини *a, b, c* називаються **півосями** еліпсоїда.

Дослідимо форму еліпсоїда і побудуємо його:

1. Так як *x, y, z*, входять в рівняння (22) тільки в парних степенях, то еліпсоїд симетричний відносно координатних площин, осей і початку координат. Центр симетрії еліпсоїда називається **центром еліпсоїда**, а вісі симетрії – його **осями**.

Точки перетину еліпсоїда з осями координат: $A_1(a,0,0)$; $A_2(-a,0,0)$; $B_1(0,b,0)$; $B_2(0,-b,0)$; $C_1(0,0,c)$; $C_2(0,0,-c)$ називаються **вершинами еліпсоїда.**

2. Із рівняння (1) маємо: $\dfrac{x^2}{a^2} \le 1 \Rightarrow -a \le x \le a$. Аналогічно для y і z: $-b \le y \le b$ і $-c \le z \le c$ Отже, всі точки еліпсоїда лежать всередині прямокутного паралелепіпеда із сторонами *2a, 2b, 2c* (крім вершин), з центром в точці *O*.

3. Розглянемо перерізи еліпсоїда координатними площинами і площинами, паралельними до них.

Площина *XOY* і паралельні до неї площини мають рівняння *z=h*.

В перетині еліпсоїда з такими площинами отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}.$$

Можливі три випадки:

1). $|h| < c$, тоді маємо $\dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)} = 1$ – еліпс. При зменшенні $|h|$ піввісі його збільшуються і коли *h=0*, одержуємо еліпс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в площині *XOY*. Побудуємо його (див. рис. 19).

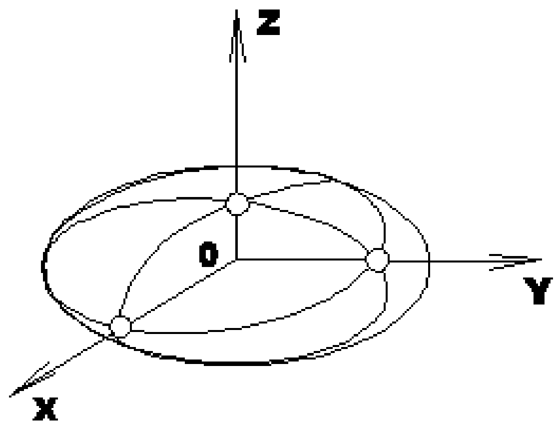

Рис.19

2). $|h| = c$, то одержуємо $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ – дві уявні прямі, що перетинаються в дійсних точках $C_1(0,0,c)$; $C_2(0,0,-c)$.

3). $|h| > c$, то одержуємо рівняння уявного еліпса, отже в цьому випадку площина *z=h* з еліпсоїдом не має спільних точок.

Повністю аналогічно розглядаються перерізи еліпсоїда площинами $x=h$ і $y=h$. Побудувавши еліпси в координатних площинах, отримаємо зображення еліпсоїда (рис.19).

Відмітимо, що якщо в рівнянні (22) a,b,c – різні, то еліпсоїд називається **трьохвісним**, а якщо які-небудь дві із півосей рівні, наприклад $a=c$, то в перетині з площинами $y=h$, де $|h|<b$, отримаємо кола (рис.20).

В цьому випадку еліпсоїд можна одержати обертанням еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ навколо осі OY. Такий еліпсоїд називається **еліпсоїдом обертання**. Якщо ж в рівнянні (22) $a=b=c,$ то отримаємо сферу радіуса a.

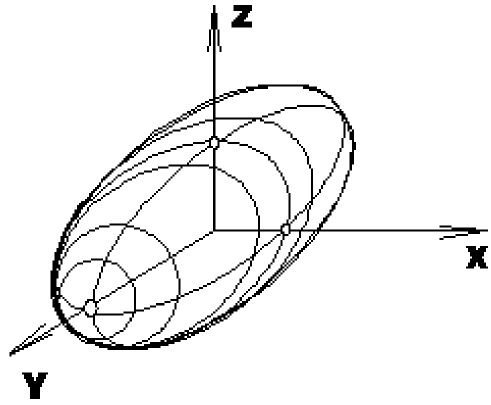

Рис.20

§ 26. Конус

Конусом 2-го порядку називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad \textbf{(23)}$$

Покажемо, що конус складається із прямих, які проходять через початок системи координат. Нехай точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – довільна точка конуса (23), відмінна від точки $O(0,0,0)$. Тоді координати точки M_0 задовольняють рівняння конуса отже, $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=0$. Розглянемо точку $M(tx_0,ty_0,tz_0)$, де $t\in R$. Точка M також належить конусу, оскільки $\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)t^2=0$. Таким чином разом з точкою M_0 конусу належить вся пряма, яка проходить через початок координат і має направляючий вектор $\vec{p}=(x_{0,}y_0,z_0)$. Отже, конус можна розглядати як множину деяких прямих, які проходять через точку *O*, які називаються **твірними**. Точка *O* називається **вершиною конуса**.

Так як змінні *x,y,z* входять в рівняння конуса лише в парних степенях, то він симетричний відносно координатних площин, осей і початку координат.

Дослідимо форму конуса (23) методом перерізів і побудуємо його.

1). Розглянемо перерізи конуса площиною *XOY* і паралельними до неї площинами. Їх рівняння *z=h.* В перетині отримаємо:

$$\begin{cases} z=h, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} z=h, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2} \end{cases}$$

. Можливі випадки:

a) якщо $h=0$, то одержимо точку *O(0,0,0),*

b) якщо $h\neq 0$, то фігура перетину – еліпс (рис. 21).

Таким чином, конус, який має рівняння (23) – це множина всіх прямих простору, які проходять через точку *O* і точки будь-якого еліпса з центром в точці *Q*, яка належить вісі *OZ* ($Q\neq O$).

У цьому випадку еліпс називається **направляючим, а** вісь *OZ* називається **віссю конуса.**

Відмітимо, що **направляючою конуса** називається довільна лінія розміщена на ньому і для якої виконується умова, що будь-яка прямолінійна твірна перетинає її в одній і тільки одній точці.

2). Розглянемо перерізи конуса площиною *XOZ* і паралельними до неї площинами. Їх рівняння *y=k.* В перетині отримаємо:

$$\begin{cases} y = k, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -\dfrac{k^2}{b^2}, \end{cases} \qquad \text{або} \qquad \begin{cases} y = k, \\ \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{k^2}{b^2} \end{cases}$$

а) в площині *XOZ,* тобто коли $k=0$, маємо пару прямих, які перетинаються в точці $O(0,0,0)$ (рис.21),

b) якщо $k\neq 0$ то отримаємо гіперболу з дійсною віссю паралельною до *OZ*.

3). Аналогічні до другого випадку перерізи отримаємо і в площині *YOZ* та паралельних до неї площинах: $x=m$.

Якщо в рівнянні (23) $a=b$, то конус називається **конусом обертання**, або **круговим конусом**.

Переріз конуса з площиною, яка не проходить через точку *O* може бути як еліпсом, гіперболою, так і параболою (переріз площиною, яка паралельна деякій твірній). Таким чином криві другого порядку (еліпс, гіперболу, параболу) можна розглядати як перерізи конуса другого порядку площинами. Тому їх часто називають **конічними перерізами**.

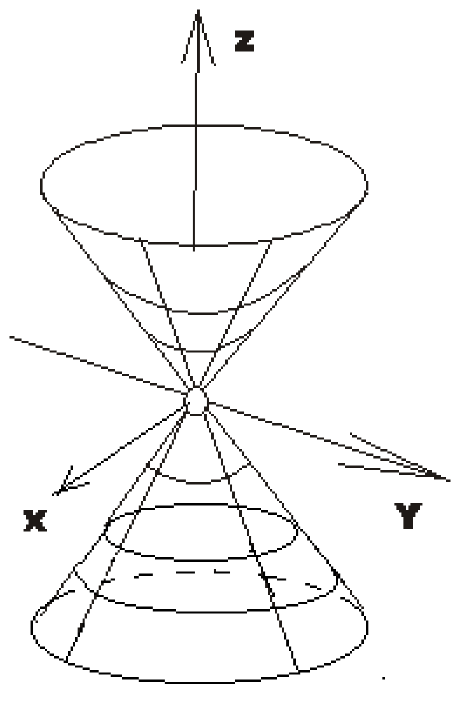

Рис.21

§ 27. Однопорожнинний гіперболоїд

Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \textbf{(24)}$$

Додатні числа *a,b,c* називаються **півосями** однопорожнинного гіперболоїда.

Оскільки змінні входять в рівняння (24) тільки в парних степенях, то однопорожнинний гіперболоїд симетричний відносно всіх координатних площин, осей і початку системи координат.

Дві вісі *OX* і *OY* перетинають однопорожнинний гіперболоїд. Вони називаються **дійсними**, а вісь OZ не перетинає його, тому називається **уявною**. Точки перетину поверхні з координатними осями називаються **вершинами**.

Дослідимо форму однопорожнинного гіперболоїда методом перерізів і побудуємо його.

1). Розглянемо перерізи однопорожнинного гіперболоїда площиною *YOZ* і паралельними до неї площинами. Їх рівняння *x=k.* В перетині отримаємо:

$$\begin{cases} x = k \\ \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2} \end{cases} .$$

Можливі три випадки:

a) якщо $|k| < a$ то маємо гіперболу з асимптотами $z = \pm \dfrac{c}{b} y$ (з дійсною віссю, яка паралельна до осі *OY*),

b) якщо $|k| = a$ – одержуємо пару прямих, що перетинаються,

c) якщо $|k| > a$ – одержуємо гіперболу з дійсною віссю, яка паралельна до вісі *OZ*).

Якщо *k=0* – одержуємо гіперболу в площині *YOZ*, яку і будуємо (дивись рис. 22).

2). Повністю аналогічні до попереднього перерізи отримуються в перетині однопорожнинного гіперболоїда площиною *XOZ* і паралельними до неї площинами: *y=m.*

3). Розглянемо перерізи однопорожнинного гіперболоїда площиною *XOY* і паралельними до неї площинами. В перетині отримаємо:

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2} \end{cases} \text{ - еліпс.}$$

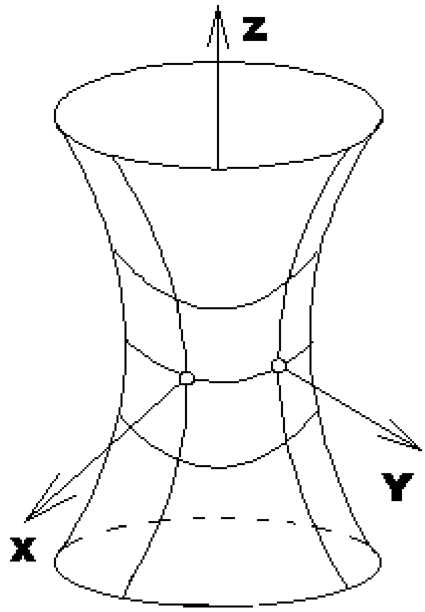

Рис.22

Якщо *h=0*, то одержуємо, **горловий** еліпс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. При зростанні $|h|$ піввісі еліпса необмежено збільшуються разом із еліпсом. побудуємо горловий еліпс, та пару еліпсів в площинах паралельних до *XOY* (на однаковій відстані до неї) (рис.22).

Якщо *a=b*, то отримаємо рівняння у вигляді: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Це **однопорожнинний гіперболоїд обертання**. Його можна отримати обертанням гіперболи : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ навколо вісі *OZ*.

Всі асимптоти однопорожнинного гіперболоїда проходять через точку *O* і задовольняють рівняння: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, тобто належать конусу, який називається **асимптотичним конусом** однопорожнинного гіперболоїда.

§ 28. Двопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат має рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad \textbf{(25)}$$

Додатні числа *a,b,c* називаються **півосями** двопорожнинного гіперболоїда.

Оскільки змінні *x,y,z* входять в рівняння (25) тільки в парних степенях, то двопорожнинний гіперболоїд симетричний відносно всіх координатних площин, осей і початку системи координат.

Вісі *OX* і *OY* не перетинають двопорожнинний гіперболоїд. Вони називаються **уявними**, а вісь *OZ* перетинає його в точках $C_1(0,0,c)$, $C_2(0,0,-c)$. які називаються **вершинами**. Вісь *OZ* називається **дійсною**.

Дослідимо форму двопорожнинного гіперболоїда методом перерізів і побудуємо його.

1). Розглянемо перерізи двопорожнинного гіперболоїда площиною *XOY* і паралельними до неї площинами:

$$\begin{cases} z=h \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1 \end{cases}.$$

Можливі три випадки:

a). Якщо $|h|<c$ то в перетині – порожня множина.

b). Якщо $|h|=c$ то отримаємо $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, тобто маємо точки $C_1(0,0,c)$, $C_2(0,0,-c)$.

c). Якщо $|h|>c$ то маємо еліпс, який збільшується з ростом $|h|$.

2). В площині *YOZ* і паралельних до неї площинах отримаємо:

$$\begin{cases} x=h, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x=h, \\ \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{a^2}+1, \end{cases}$$ це гіпербола з віссю паралельною до *OZ*. Побудуємо її в площині *YOZ* (рис.23).

3). В площині *XOZ* і паралельних до неї площинах маємо:

$$\begin{cases} y = h, \\ -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{h^2}{b^2} + 1 \end{cases}$$ – гіпербола з віссю паралельною до *OZ*. Побудуємо її в площині *XOZ* (рис.23).

Так як і в попередньому випадку гіперболоїд необмежено наближається до конуса, але знаходиться при цьому всередині кожної з порожнин. Тому й називається двопорожнинним. Якщо в рівнянні (25) *a=b*, то поверхня називається **двопорожнинним гіперболоїдом обертання**. Його можна одержати обертанням гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, яка знаходиться в площині *XOZ* навколо вісі *OZ*.

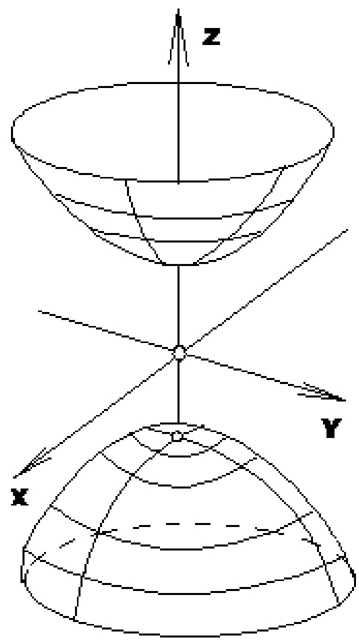

Рис.23

§ 29. Еліптичний параболоїд

Еліптичним параболоїдом називається поверхня, яка в деякі прямокутній системі координат має рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \qquad \textbf{(26)}$$

Так як в рівняння (26) змінні *x* І *y* входять в парній степені, а *z* в непарній степені, то еліптичний параболоїд симетричний відносно площин *XOZ* і *YOZ* та вісі *OZ*. Відносно інших координатних осей і площини *XOY* він не симетричний. Точка *O(0,0,0)* належить еліптичному параболоїду і називається **вершиною**.

Дослідимо форму еліптичного параболоїда методом перерізів і побудуємо його.

1). Розглянемо перерізи еліптичного параболоїда площиною *XOY* і паралельними до неї площинами:

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2h \end{cases}.$$ Отримаємо:

1. Якщо $h<0$ – порожня множина.
2. Якщо $h=0$ – точка $O(0,0,0)$.
3. Якщо $h>0$ – еліпс.

2). В площині *YOZ* і паралельних до неї площинах отримаємо:

$$\begin{cases} x = k, \\ \dfrac{y^2}{b^2} = 2z - \dfrac{k^2}{a^2}, \end{cases}$$ це парабола з віссю, яка паралельна до вісі *OZ* (якщо $k=0$, то парабола з віссю *OZ* і з вершиною в точці $O(0,0,0)$. Її і будуємо (рис.24)).

3). В площині *XOZ* і паралельних до неї площинах отримаємо параболу (повністю аналогічно до попереднього) (рис.24).

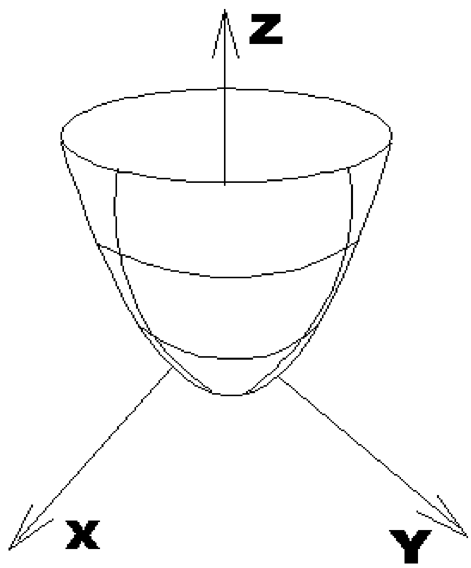

Рис.24

Якщо в рівнянні (26) $a=b$, то отримаємо **параболоїд обертання** (навколо вісі *OZ*).

§ 30. Гіперболічний параболоїд

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка в деякі прямокутній системі координат визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \qquad \mathbf{(27)}$$

Так як в рівняння (27) змінні *x* І *y* входять в парній степені, а *z* в непарній степені, то гіперболічний параболоїд симетричний відносно площин *XOZ* і *YOZ* та вісі *OZ*. Відносно інших координатних осей і площини *XOY* він не симетричний. Точка *O(0,0,0)* належить гіперболічному параболоїду і називається **вершиною**.

Дослідимо форму гіперболічного параболоїда методом перерізів і побудуємо його.

1). Розглянемо перерізи гіперболічного параболоїда площиною *XOY* і паралельними до неї площинами:

$$\begin{cases} z=h \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2h \end{cases}.$$

Можливі три випадки:

a). Якщо *h=0*, то в перетині отримаємо пару прямих, що перетинаються в точці *O(0,0,0)*.

b). Якщо *h>0*, то отримаємо гіперболу з віссю, яка паралельна до вісі *OX*.

c). Якщо *h<0*, то маємо гіперболу з віссю, яка паралельна до вісі *OY*.

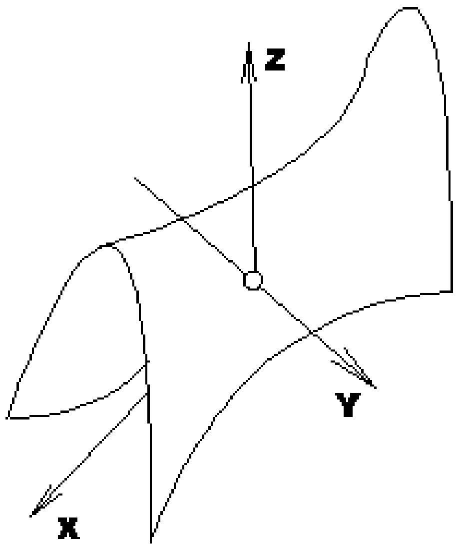

Рис.25

2). В площині *YOZ* і паралельних до неї площинах отримаємо

$$\begin{cases} x=k, \\ -\dfrac{y^2}{b^2}=2z-\dfrac{k^2}{a^2} \end{cases}$$ – параболу з віссю паралельною до вісі *OZ* (вітки направлені вниз) (рис. 25).

3). В перетині гіперболічного параболоїда з площиною *XOZ* і паралельними до неї площинами також отримаємо параболу з віссю паралельною до вісі *OZ* (вітки направлені вверх):

$$\begin{cases} y = p, \\ \dfrac{x^2}{a^2} = 2z + \dfrac{p^2}{a^2}. \end{cases}$$ (рис. 25).

§ 31. Циліндричні поверхні

Поверхня, яка разом з будь-якою своєю точкою містить і всю пряму, яка проходить через цю точку, паралельно до деякого вектора $\vec{p}$ називається **циліндричною**.

Циліндричну поверхню можна отримати, якщо провести через деяку криву y_k (направляючу) прямі лінії (твірні), які паралельні до $\vec{p}$. Якщо $\vec{p}$ паралельний до вісі *OZ*, то за направляючу можна взяти лінію, яка лежить в площині *XOY.* Тоді циліндричну поверхню можна задати рівнянням від двох змінних *F(x,y)=0* – тобто направляючою. Дійсно, в цьому випадку, якщо точка $M(x_0, y_0, 0)$ належить циліндричній поверхні (її координати задовольняють рівняння *F(x,y)*=0), то цій поверхні буде належати і точка $M(x_0, y_0, z)$ (так як її координати задовольнятимуть це ж рівняння *F(x,y)=0*) отже, поверхні буде належати і вся пряма, яка паралельна до вісі *OZ*.

Циліндр другого порядку може бути (в залежності від направляючої) еліптичним, гіперболічним, параболічним, а також виродженим циліндром, який розпадається на пару площин, що перетинаються, пару паралельних площин, пару площин що співпадають (див. **§14)**.

<u>**Еліптичним циліндром**</u> називається поверхня, яка в деякі прямокутній системі координат визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ . \qquad \textbf{(28)}$$

Дослідимо форму еліптичного циліндра методом перерізів і побудуємо його.

1). Розглянемо перерізи еліптичного циліндра площиною XOY і паралельними до неї площинами:

$$\begin{cases} z=h \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases} - \text{еліпс.}$$

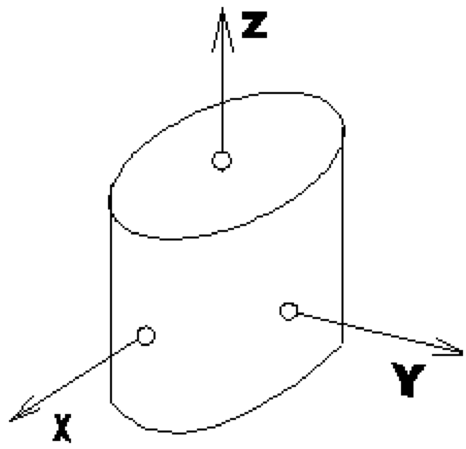

Рис.26

2). В перетині еліптичного циліндра з площиною XOZ і паралельними до неї площинами отримаємо:

$$\begin{cases} y=k, \\ \dfrac{x^2}{a^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2}, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y=k, \\ x^2=a^2-\dfrac{a^2k^2}{b^2}. \end{cases}$$

a). Якщо $|k|=b$ то маємо пару прямих, що співпали (будуємо пряму паралельну до вісі OZ) (рис 26).

b). Якщо $|k|>b$ маємо порожню множину.

c). Якщо $|k|<b$ отримаємо пару паралельних прямих (які паралельні до вісі OZ).

3). Перетин еліптичного циліндра з площиною YOZ і паралельними до неї площинами повністю аналогічний до попереднього (рис.26).

Як бачимо для побудови циліндра можна і не використовувати метод перерізів, а просто побудувати направляючу і провести твірні, паралельні до вісі циліндра (в нашому випадку до вісі OZ).

<u>Гіперболічним циліндром</u> (рис.27) називається поверхня, яка в деякі прямокутній системі координат визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \qquad \textbf{(29)}$$

<u>Параболічним циліндром</u> (рис.28) називається поверхня, яка в деякі прямокутній системі координат визначається рівнянням:

$$y^2 = 2px \ . \qquad \textbf{(30)}$$

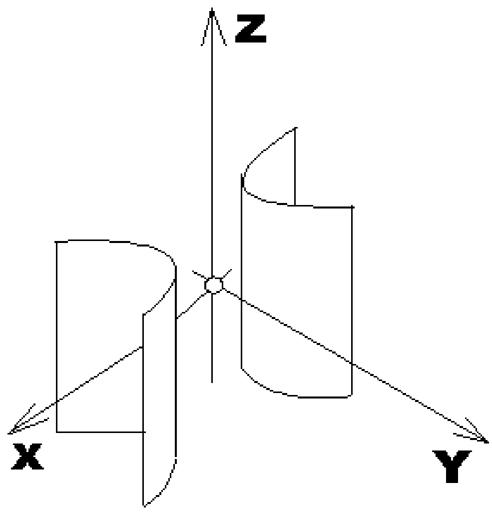

Рис.27

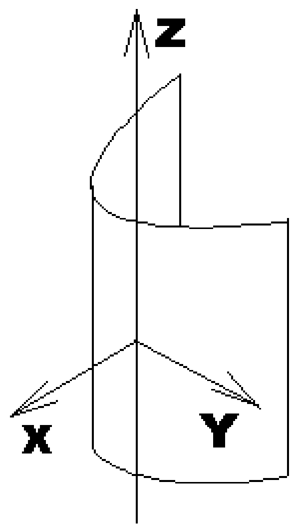

Рис.28

Приклад 10.

Побудувати зображення циліндричної поверхні, заданої рівнянням $x - y^2 + 4 = 0$.

Розв'язання: Рівняння з двома змінними x і y визначає циліндричну поверхню, твірні якої паралельні до вісі OZ. За направляючу можна взяти лінію перетину поверхні з координатною площиною XOY.

Так як площина XOY має рівняння $z=0$, то направляюча задається системою рівнянь: $\begin{cases} x - y^2 + 4 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$

Щоб привести до канонічного вигляду рівняння $x - y^2 + 4 = 0$ виконаємо паралельне перенесення системи координат за формулами:

$$\begin{cases} x = x' - 4, \\ y = y', \\ z = z', \end{cases}$$ при якому початок

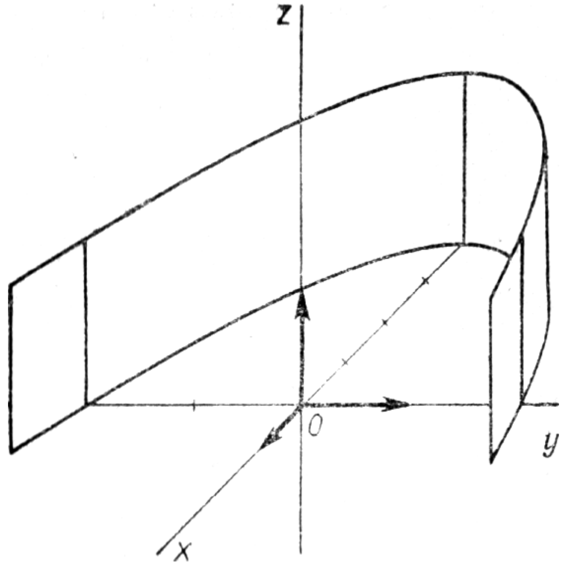

Рис.29

координат переходить в точку $O'(-4;0;0)$. У нових координатах одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y'^2 = x, \\ z' = 0. \end{cases}$$

Така система рівнянь визначає параболу, у якої вершина розташована в точці O', а вісь направлена по осі $O'X'$, яка співпадає з віссю OX (рис.29). Для уточнення побудови корисно побудувати точки перетину цієї параболи з віссю OY. Для цього розв’яжемо систему рівнянь $\begin{cases} x - y^2 + 4 = 0, \\ x = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ одержимо: $x = 0, y = \pm 2, z = 0$. Відзначимо на малюнку точки $A(0;2;0)$ і $B(0;-2;0)$ і проведемо через них направляючу параболу.

Щоб отримати наочне зображення, побудуємо ще одну параболу, утворену з направляючої паралельним перенесенням уздовж осі OZ. Проведемо ще декілька твірних, сполучаючи точки цих двох парабол, які розташовані на одній паралелі до осі OZ.

§ 32. Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку

Пряма, яка лежить на поверхні, називається **прямолінійною твірною** цієї поверхні.

Отже, твірні конуса і циліндричної поверхні являються їх прямолінійними твірними. Є і інші поверхні другого порядку, які можуть утворитися з прямих ліній. Такі властивості мають однопорожнинний гіперболоїд та гіперболічний параболоїд (очевидно, що еліпсоїд, двопорожнинний гіперболоїд і еліптичний параболоїд не мають прямолінійних твірних).

Розглянемо однопорожнинний гіперболоїд: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Запишемо: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$ або

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases},$$ де α довільне дійсне число **(31)**

При фіксованому значенні α ця система визначає пряму лінію (задану як перетин двох площин). Змінюючи α ми отримаємо сукупність (сім'ю) прямих. Кожна з цих прямих лежить на поверхні однопорожнинного гіперболоїда. Дійсно, якщо координати деякої точки задовольняють систему (31), то, перемноживши рівняння цієї системи, отримаємо рівняння однопорожнинного гіперболоїда. Отже, довільна точка прямої (31) належить однопорожнинному гіперболоїду, тобто ці прямі є прямолінійними твірними.

Аналогічно, можна отримати ще одну систему (сім'ю) прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \beta\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = 1 - \dfrac{y}{b} \end{cases}$$, де β довільний параметр **(32)**

Основні **властивості прямолінійних твірних**:

1. Через довільну точку поверхні проходить дві і тільки дві прямолінійні твірні, одна з сімейства (31), а інша з сімейства (32).

2. Будь-які дві прямолінійні твірні одного сімейства – мимобіжні.

3. Будь-які дві прямолінійні твірні різних сімейств належать одній площині.

Зауважимо, що, крім розглянутих сімей прямолінійних твірних є ще дві прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда, які лежать у площинах, паралельних до площини *XOZ*. Це такі прямі:

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{y}{b} = 0, \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 1 + \dfrac{y}{b} = 0, \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0. \end{cases}$$

Ці прямі відповідають значенням $\alpha=\infty$ і $\beta=\infty$. Вони разом із сімействами (31) і (32) визначають усі прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда.

Властивість однопорожнинного гіперболоїда (складатися з прямолінійних твірних) використовується на практиці – побудова башт, радіо і телещогл і ін. Ідея такого використання належить російському інженерові В.Г.Шухову (1853-1939р.), який запропонував конструкцію з металевих балок, розміщених так, як прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда обертання. Такі конструкції виявилися дуже міцними і легкими, що й зумовило їх широке використання в будівництві.

Гіперболічний параболоїд має рівняння : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$.

Записавши це рівняння так: $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z$, отримаємо дві системи рівнянь, які визначають дві сім'ї прямолінійних твірних

гіперболічного параболоїда:

$$\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z,\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2\alpha,\end{cases} \quad \textbf{(33)} \quad \text{і} \quad \begin{cases}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2\beta,\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z.\end{cases} \quad \textbf{(34)}$$

Вони мають такі ж властивості, як і прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда. Крім того, легко бачити, що всі твірні з сімейства (33) паралельні до площини $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, а з сімейства (34) паралельні до площини $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$.

§ 33. Дотична площина до поверхні другого порядку

Еліпсоїд і гіперболоїди можна задати рівнянням $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1$, де A, B, C – не від'ємні одночасно.

Розглянемо пряму l задану параметричними рівняннями: $\begin{cases}x=\alpha t+x_0,\\ y=\beta t+y_0,\\ z=\gamma t+z_0.\end{cases}$ Знайдемо точки перетину прямої l з поверхнею (підставимо рівняння прямої в поверхню): $\frac{(\alpha t+x_0)^2}{A}+\frac{(\beta t+y_0)^2}{B}+\frac{(\gamma t+x_0)^2}{C}=1$, або

$$\left(\frac{\alpha^2}{A}+\frac{\beta^2}{B}+\frac{\gamma^2}{C}\right)t^2+2\left(\frac{\alpha x_0}{A}+\frac{\beta y_0}{B}+\frac{\gamma z_0}{C}\right)t+\frac{x_0^2}{A}+\frac{y_0^2}{B}+\frac{z_0^2}{C}=1.$$

Якщо отримане квадратне рівняння має два дійсних кореня $t_1 \neq t_2$, то це параметри точок перетину прямої і поверхні. Підставивши їх в рівняння прямої, отримаємо координати точок перетину.

Якщо ж розв'язки збігаються $(t_1 = t_2)$, то пряма l– дотикається до поверхні.

Виберемо на поверхні деяку точку $P(x_0, y_0, z_0)$. Дотична до будь-якої лінії на поверхні, яка проходить через точку P, називається **дотичною** до поверхні в цій точці.

Покажемо, що геометричне місце дотичних до поверхні в заданій точці P являє собою площину.

Так як точка $P(x_0, y_0, z_0)$ належить поверхні, то її координати задовольняють рівняння поверхні отже, $\frac{x_0^2}{A}+\frac{y_0^2}{B}+\frac{z_0^2}{C}=1$ і маємо рівняння: $\left(\frac{\alpha^2}{A}+\frac{\beta^2}{B}+\frac{\gamma^2}{C}\right)t^2+2\left(\frac{\alpha x_0}{A}+\frac{\beta y_0}{B}+\frac{\gamma z_0}{C}\right)t=0$.

Оскільки l – дотична, то корені цього рівняння рівні $(t_1 = t_2)$.

Так як $t_1 = 0$, то і $t_2 = 0$, що можливо лише у випадку, коли $\frac{\alpha x_0}{A}+\frac{\beta y_0}{B}+\frac{\gamma z_0}{C}=0$.

З рівнянь прямої знаходимо: $\alpha=\frac{x-x_0}{t}$, $\beta=\frac{y-y_0}{t}$, $\gamma=\frac{z-z_0}{t}$ і підставивши ці значення в останню рівність, отримаємо геометричне місце дотичних до поверхні: $\frac{x_0(x-x_0)}{A}+\frac{y_0(y-y_0)}{B}+\frac{z_0(z-z_0)}{C}=0$.

Очевидно, що отримане рівняння є рівнянням площини, яка називається **дотичною площиною до поверхні в точці** $P(x_0, y_0, z_0)$.

Оскільки точка P належить поверхні, то $\frac{x_0^2}{A}+\frac{y_0^2}{B}+\frac{z_0^2}{C}=1$ і рівняння площини приймає вигляд $\frac{x_0 x}{A}+\frac{y_0 y}{B}+\frac{z_0 z}{C}=1$.

Отже, рівняння дотичних площин до еліпсоїда і гіперболоїдів матимуть вигляд: $\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}+\frac{z_0 z}{c^2}=1$ (еліпсоїда),

$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}-\frac{z_0 z}{c^2}=1$ (однопорожнинного гіперболоїда),

$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}-\frac{z_0 z}{c^2}=-1$ (двопорожнинного гіперболоїда).

Аналогічно отримують рівняння дотичних площин до параболоїдів в точці $P(x_0, y_0, z_0)$:

$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=z+z_0$ (еліптичного параболоїда),

$\frac{x_0 x}{a^2}-\frac{y_0 y}{b^2}=z+z_0$ (гіперболічного параболоїда).

ЗАДАЧІ

1. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням прямої, заданим рівняннями $\begin{cases} x=0, \\ z=2y, \end{cases}$ навколо осі OZ. Вказати вид цієї поверхні, побудувати її зображення.

2. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням параболи, заданої системою рівнянь: $\begin{cases} z^2=2x, \\ y=0 \end{cases}$ навколо осі OZ.

3. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням параболи $\begin{cases} z^2 = 10y, \\ x = 0 \end{cases}$ навколо осі *OZ*.

4. У площині *YOZ* дано коло з центром в точці (0, 4, 0) радіуса *r=1*. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням даного кола навколо осі *OZ*.

5. Коло радіуса *r* розташоване на площині *YOZ* так, що дотикається осі *OZ* в початку координат. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням даного кола навколо осі *OZ*.

6. Парабола з параметром $p = 5$ розташована на площині *YOZ* так, що директриса співпадає з віссю *OZ*. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням даної параболи навколо осі *OZ*.

7. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням навколо осі *OY* кожної з наступних кривих, розташованих на площині *XOY:*

а) еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$ б) гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$

в) гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1;$ г) параболи $x^2 = 2py.$

8. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням синусоїди $z = \sin y$ навколо осі *OZ*.

9. Знайти радіус кола, по якому площина, $z = a$ перетинає сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

10. Визначити вид поверхні другого порядку, заданої рівнянням $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2 = 0$. Побудувати її зображення.

11. Знайти піввісі і вершини еліпса, по якому площина $x - 2 = 0$ перетинає еліпсоїд $3x^2 + 4y^2 + 12z^2 - 48 = 0$.

12. Дослідити методом перерізів наступні поверхні другого порядку, задані в прямокутній системі координат рівняннями:

а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$;

б) $2x^2+3y^2+z^2-8x+6y-4z-3=0$.

13. Написати рівняння еліпсоїда, осі якого співпадають з осями координат і який:

а) проходить через точку *M (2, 0, 1)* і перетинає площину *XOY* по еліпсу $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{1}=1$;

б) проходить через точку $N\left(1,\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$ і перетинає площину *YOZ* по еліпсу $\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{20}=1$;

в) перетинає площину *YOZ* по еліпсу $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{2}=1$, а площину *XOY* по колу $x^2+y^2=25$.

14. Написати рівняння еліпсоїда, який проходить через точки *(2, 2, 4), (0, 0, 6), (2, 4, 2)*, і для якого координатні площини даної прямокутної системи координат є площинами симетрії.

15. Скласти рівняння циліндричної поверхні твірні якої паралельні до осі *OZ*, а направляюча визначається системою рівнянь: $\begin{cases}\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1,\\ z=0.\end{cases}$

16. Скласти рівняння кругової циліндричної поверхні, якщо а) віссю служить вісь *OX*, а радіус направляючого кола рівний *a*; б) віссю служить вісь *OY*, і точка $(4;2;-3)$ належить поверхні.

17. Зобразити циліндричні поверхні, задані рівнянням

а) $x^2+4y=0$; б) $3x^2+2y^2-6=0$.

18. Визначити вид поверхні другого порядку, заданої рівнянням $4x^2+4y^2-z^2-16=0$. Побудувати її зображення.

19. Визначити перетин однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-z^2=1$ з площиною, проведеною через точку (0, 0, 1) паралельно до площини *XOY.*

20. Написати канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда, якщо він:

а) проходить через точку $\left(\sqrt{5},3,2\right)$ і перетинає площину *XOZ* по гіперболі $\frac{x^2}{5}-\frac{z^2}{4}=1$;

б) перетинає площину *XOY* по колу $x^2+y^2=9$, а площину *XOZ* по гіперболі $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{10}=1$.

21. Написати рівняння двопорожнинного гіперболоїда в канонічній системі координат, якщо точки $M_1(3,1,2), M_2\left(2,\sqrt{11},3\right)$ і $M_3\left(6,2,\sqrt{15}\right)$ належать даній поверхні.

22. Знайти множину точок, для кожної з яких модуль різниці відстаней від двох даних точок *(0, 0, 3), (0, 0, –3)* є величина постійна, рівна 4.

23. Знайти вершину і фокальний параметр параболи, по якій площина $x+6=0$ перетинає параболоїд $4x^2-5y^2+120z=0$.

24. Дослідити методом перерізів наступні поверхні другого порядку, задані в прямокутній системі координат рівняннями. Побудувати їх зображення.

а) $x^2-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$; б) $4x^2+y^2-z^2=0$;

в) $4x^2+y^2-16z=0$; г) $3x^2-y^2-4z^2+12=0$;

д) $2x^2-3y^2+12z^2+12=0$; е) $9y^2+x^2+18z=0$;

25. Визначити вид поверхні другого порядку, заданої рівнянням. Дослідити її методом перерізів. Побудувати її зображення в прямокутній системі координат.

а) $x^2-2y^2+3z^2-24=0$; б) $x^2-2y^2+3z^2=0$;

в) $x^2-2y^2+3z^2+6=0$; г) $2x^2+y^2-8z=0$;

д) $x^2-2y^2-3z^2=0$; е) $2x^2-4y-z^2=0$;

є) $9y^2-16x^2-144=0$; ж) $x^2=6z$.

26. Дослідити методом перерізів наступні поверхні другого порядку, задані в прямокутній декартовій системі координат. Побудувати їх зображення.

а) $x^2+y^2-z-2=0$.

б) $x^2+2y^2-3z^2+2x-4y-6z=0$;

в) $z=x^2+3y^2-6y-1$;

г) $4x^2-y^2+4z^2+4y+32z+56=0$.

д) $2x^2-3y^2-2z^2-8x+6y-12z-21=0$;

е) $x^2+2y^2-4z^2-8z-8=0$.

27. Написати рівняння двох систем прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда $x^2+9y^2-z^2=9$ і визначити ті із них, які проходять через точку $A\left(3,\ \frac{1}{3},\ -1\right)$.

28. На гіперболічному параболоїді $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=2z$ знайти прямолінійні твірні, які паралельні до площини $6x+4y-8z+1=0$.

29. Знайти ті прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$, які перпендикулярні до осі OY.

Індивідуальне домашнє завдання:

Дослідити поверхні методом перерізів, вказати назву поверхні, побудувати її зображення в прямокутній системі координат.

Варіант № 1

1. $\frac{x^2}{4} - y^2 - \frac{z^2}{2} = 1.$ 2. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$ 3. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + z^2 = 0.$

4. $2x^2 + y^2 - 8z = 0.$ 5. $y^2 + z^2 = 6x^2 - 36.$

Варіант № 2

1. $z^2 = 8x + 2.$ 2. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1.$ 3. $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 2y.$

4. $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4x - 2z - 3 = 0.$ 5. $5x^2 - 9z^2 = 0.$

Варіант № 3

1. $z^2 - y + 6 = 0.$ 2. $4x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2z + 2y = 10.$

3. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} - \frac{z^2}{16} = 1.$ 4. $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} - 8y = 0.$ 5. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 0.$

Варіант № 4

1. $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1.$ 2. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1.$ 3. $x^2 - 4y^2 - 16z = 0.$

4. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 0.$ 5. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1.$

Варіант № 5

1. $y^2 + 4z^2 = 16x.$ 2. $x^2 = -8y.$ 3. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1.$

4. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{25}=0$. 5. $x^2-2x+y^2-4y+z^2+1=0$.

Варіант № 6

1. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{3}=0$. 2. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. 3. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$.

4. $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}=2y$. 5. $x^2+4y^2+4z^2-16=0$.

Варіант № 7

1. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$. 2. $y^2+3z^2=6x$. 3. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{25}=0$.

4. $4y^2-32x^2-16=0$. 5. $x^2+y^2+z^2-2x-4y+1=0$.

Варіант № 8

1. $x^2+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{5}=0$. 2. $\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{4}=8y$. 3. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$

4. $z^2-4x-8=0$. 5. $4y^2-9z^2=0$.

Варіант № 9

1. $z^2=6x$. 2. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1$. 3. $6x^2+4y^2-24z=0$.

4. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$. 5. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$.

Варіант № 10

1. $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1$. 2. $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=2x$. 3. $-x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1$.

4. $x^2-4y^2-9z^2=0$. 5. $x^2+y^2+4z^2-16=0$.

Варіант № 11

1. $y^2+4z^2-8x=0$. 2. $x^2+4y^2+16z^2-4x=12$.

3. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=0$. 4. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}-\frac{z^2}{9}=1$. 5. $16y^2+64z^2-64=0$.

Варіант № 12

1. $x^2-8y^2+4z^2=0$. 2. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=4z$. 3. $y^2=9x$.

4. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}-z^2=1$. 5. $x^2+y^2+z^2-2x-4y-27=0$.

Варіант № 13

1. $x^2=16z$. 2. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$. 3. $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{4}=4y$.

4. $\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$. 5. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{32}+\frac{z^2}{64}=0$.

Варіант № 14

1. $x^2-4z^2-16=0$. 2. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$. 3. $\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}=8x$.

4. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{5}=0$. 5. $4x^2+4y^2-16z=0$.

Варіант № 15

1. $2x^2-8y^2-16z=0$. 2. $\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=0$. 3. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1$.

4. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-z^2=0$. 5. $x^2+y^2+z^2-4x-2z-11=0$.

Варіант № 16

1. $2y^2+8z^2-16x=0$. 2. $\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$. 3. $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{36}=1$.

4. $16x^2-12y^2-32z^2=0$. 5. $4x^2+16y^2+8z^2-64=0$.

Варіант № 17

1. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}+z^2=0$. 2. $x^2+z^2=y$. 3. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$.

4. $4y^2-9z^2-36=0$. 5. $x^2+y^2+4z^2-16=0$.

Варіант № 18

1. $2x^2+4y^2-16z=0$. 2. $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{9}=1$. 3. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{5}=0$.

4. $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1$. 5. $y^2+z^2=x$.

Варіант № 19

1. $x^2+y^2-2x+2y-9=0$. 2. $4x^2+9y^2-16z^2=0$.

3. $2x^2-8y+4z^2=0$. 4. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{5}=1$. 5. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$.

Варіант № 20

1. $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{9} = 1$. 2. $\frac{x^2}{4} - y^2 - z^2 = 0$. 3. $\frac{y^2}{18} - \frac{z^2}{8} - 4x = 0$.

4. $y^2 = 8x$. 5. $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 2z = 0$.

Варіант № 21

1. $4x^2 - 9z^2 = 0$. 2. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$. 3. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 0$.

4. $16y^2 + 64z^2 - 128x = 0$. 5. $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 144 = 0$.

Варіант № 22

1. $4x^2 + 2y^2 - 16z = 0$. 2. $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$. 3. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1$.

3. $y^2 + z^2 = 18x^2 - 36$. 5. $x^2 + 4y^2 + z^2 + 8x - 8y - 4 = 0$.

Варіант № 23

1. $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$. 2. $\frac{x^2}{18} + \frac{z^2}{8} - 4y = 0$. 3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

4. $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$. 5. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$

Варіант № 24

1. $4x + y^2 - 16z^2 = 0$. 2. $y^2 + 4z^2 = 8x$. 3. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$.

4. $\frac{x^2}{4} - y^2 - \frac{z^2}{9} = 1$. 5. $25x^2 + 50y^2 - 100z^2 = 0$.

Варіант № 25

1. $y^2 = 12z$. 2. $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x + 4z = 0$.

3. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$. 4. $2x^2 + 4z^2 - 8y = 0$. 5. $x^2 - \frac{z^2}{8} = 0$.

Варіант № 26

1. $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 2z$. 2. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 0$. 3. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$.

4. $x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 10z + 4x = 0$. 5. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Варіант № 27

1. $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 4y$. 2. $x^2 + 4y^2 - 9z^2 + 4x - 8y = 0$.

3. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$. 4. $\frac{x^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 4y$. 5. $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{5} = 1$.

Варіант № 28

1. $2x^2 + 4y^2 = 16z$. 2. $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 2y$. 3. $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

4. $2x^2 - 4y^2 + z^2 - 8 = 0$. 5. $2x^2 + 6y^2 + 8z^2 - 4x + 6y - 16z + \frac{5}{2} = 0$.

Варіант № 29

1. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$. 2. $x^2 - y^2 + z^2 = 0$. 3. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$.

4. $x^2 + 4y^2 - 4x - 8 = 0$. 5. $y^2 + 4z^2 = 16x$.

Варіант № 30

1. $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 8$. 2. $x^2 - y^2 + 2x - 4y = 4$. 3. $x^2 - 9z^2 = 0$.

4. $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = 4z$. 5. $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2x - 4y + 8z = 0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометри. – М.: Наука, 1968.

2. Атанасян Л.С., Базилев В.Т. Геометрия. Ч.1. – М.: Просвещение, 1986.

3. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия. Ч. 1. – М.: Просвещение, 1974.

4. Білоусова В.П., Ільїн І.Г., Сергунова О.П., Котлова В.М. Аналітична геометрія. – К.: Вища школа, 1973.

5. Делоне Б.Н., Райков Д.А. Аналитическая геометрия. Т. 1. – М, Л.: Гостехиздат, 1948.

6. Делоне Б.Н., Райков Д.А. Аналитическая геометрия. Т. 2. – М, Л.: Гостехиздат, 1949.

7. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометри. – М.: Наука, 1972.

8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1981.

9. Кириченко В.В., Петкевич Н.Ю., Петравчук А.П. Аналітична геометрія. – К.: Київський університет, 2003.

10. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1968.

11. Постников М.М. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1973.

12. Яременко Ю.В., Лутченко Л.І. Аналітична геометрія. Ч.1 – Кіровоград: Антураж-А, 2004.

13. Атанасян Л.С., Атанасян В.А. Сборник задач по геометрии. Ч.1 – М.: Просвещение, 1973.

14. Аргунов Б.И. и др. Задачник-практикум по геометрии. Ч.2 – М.: Просвещение, 1979.

15. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986.

16. Цубербиллер О.Н. Задачи й упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Юрій Вікторович Яременко,

Людмила Іванівна Лутченко

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Частина 2

Підписано до друку 02.02.2005. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Папір офсет.
Друк різограф. Ум.др.арк. 7,2. Тираж 150.